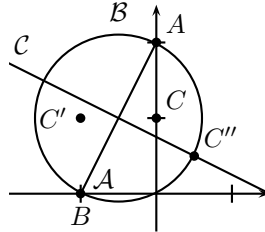


Correction Devoir Maison 01

Exercice 1

1. On obtient la figure ci-dessous :



2. (a) L'affixe du point C' vaut :

$$z_{C'} = \frac{i+1}{i-2i} = -\frac{1+i}{i} = -1+i$$

- (b) $ACBC'$ est un parallélogramme. En effet $\overrightarrow{AC}$ a pour affixe $z_C - z_A = i - 2i = -i$ et $\overrightarrow{C'B}$ a pour affixe $z_B - z_{C'} = -1 - (-1+i) = -i$ par conséquent ces deux vecteurs sont égaux ce qui justifie la nature de $ACBC'$.
3. (a) Soit z l'affixe d'un tel point C'' . $f(C'') = C$ équivaut à $\frac{z+1}{z-2i} = i$:

$$\frac{z+1}{z-2i} = i \Leftrightarrow z+1 = iz+2 \Leftrightarrow (1-i)z = 1 \Leftrightarrow z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$$

On en déduit que l'affixe de C'' est $\frac{1+i}{2}$.

- (b) Le triangle ABC'' est isocèle rectangle en C'' . En effet d'une part :

$$AC'' = |z_{C''} - z_A| = \left| \frac{1+i}{2} - 2i \right| = \left| \frac{1}{2} - \frac{3i}{2} \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Et :

$$BC'' = |z_{C''} - z_B| = \left| \frac{1+i}{2} + 1 \right| = \left| \frac{3}{2} + \frac{i}{2} \right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

Donc le triangle ABC'' est effectivement isocèle. De plus :

$$AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |-1 - 2i|^2 = 5$$

Et $AC''^2 + BC''^2 = \frac{10}{4} + \frac{10}{4} = 5$ et en vertu de la réciproque du théorème de Pythagore, cela justifie la nature de ABC'' .

4. $|z'| = \left| \frac{z+1}{z-2i} \right| = \frac{|z-z_B|}{|z-z_A|} = \frac{MB}{MA}$ si on note M le point d'affixe z .

De plus $\arg z' = \arg \frac{z-z_B}{z-z_A} = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) (2\pi)$.

5. (a) $M \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\arg z' = \pi (2\pi)$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \pi (2\pi)$ soit encore $M \in [AB]$. Par conséquent $\mathcal{A} = [AB]$.
- (b) $M \in \mathcal{B}$ si et seulement si $\arg z' = \frac{\pi}{2} (\pi)$ ce qui équivaut à $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = \frac{\pi}{2} (\pi)$ soit encore ABM rectangle en M . Par conséquent $\mathcal{B}$ est le cercle de diamètre $[AB]$.
- (c) $M \in \mathcal{C}$ si et seulement si $|z'| = 1$ ce qui équivaut à $\frac{MB}{MA} = 1$ soit encore $MB = MA$ soit enfin M équidistant de A et B . Par conséquent $\mathcal{C}$ est la médiatrice de $[AB]$.

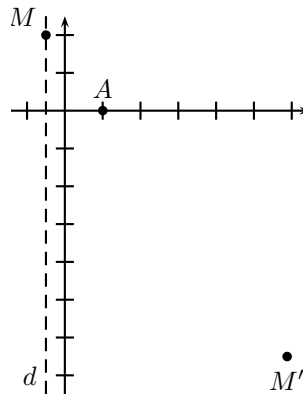
Exercice 2

Partie A : Un exemple

1. On a :

$$\begin{aligned} z' = z^3 &= \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)^3 = \left(-\frac{1}{2} + 2i\right) \left(-\frac{1}{2} + 2i\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + 2i\right) \left(\frac{1}{4} - 4 - 2i\right) = \left(-\frac{1}{2} + 2i\right) \left(-\frac{15}{4} - 2i\right) = \frac{15}{8} + i - \frac{15i}{2} + 4 \\ &= \frac{47}{8} - \frac{13i}{2} \end{aligned}$$

2. (a) On obtient la figure ci-dessous :



(b) On constate que ces trois points sont alignés. En effet, $\overrightarrow{AM}$ a pour affixe $z - 1 = -\frac{3}{2} + 2i$ et $\overrightarrow{AM'}$ a pour affixe $z^3 - 1 = \frac{39}{8} - \frac{13i}{2} = -\frac{13}{4}(-\frac{3}{2} + 2i)$ ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ce qui justifie l'alignement de A , M et M' .

Partie B : Cas général

1. (a) A , M et M' sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires ce qui équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$ soit encore $z^3 - 1 = k(z - 1)$ et comme $z \neq 1$ cela équivaut enfin à $\frac{z^3 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$.
- (b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z - 1)(1 + z + z^2) = z^3 - 1$ donc pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\frac{z^3 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$ équivaut à $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$.
2. (a) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z^2 + z + 1 = k$ alors z est solution de l'équation du second degré $z^2 + z + 1 - k = 0$ que l'on résout en calculant le discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - k)^2$. Si $\Delta \geq 0$ alors les solutions sont réelles donc $z \in \mathbb{R}$ et si $\Delta < 0$ alors $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2}$ donc $\Re z = -\frac{1}{2}$.
- (b) Il est clair que si $z \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors $\frac{z^3 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R}$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re z = -\frac{1}{2}$, notons y sa partie imaginaire :

$$z^2 + z + 1 = \left(-\frac{1}{2} + iy\right)^2 - \frac{1}{2} + iy + 1 = \frac{1}{4} - iy - y^2 + \frac{1}{2} + iy = \frac{3}{4} - y^2$$

Ainsi $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$ et par conséquent les points A , M et M' sont alignés si et seulement si $M \in (O; \vec{u}) \setminus \{A\}$ ou $M \in d$ ou d désigne la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

3. Ces instructions permettent de préciser que y doit être vu comme un réel, c'est donc la partie imaginaire de $z = -\frac{1}{2} + iy$. On calcule ensuite la partie imaginaire de $z^2 + z + 1$ qui doit être nulle. On obtient donc comme réponses :

$$z = -\frac{1}{2} + iy$$

0