

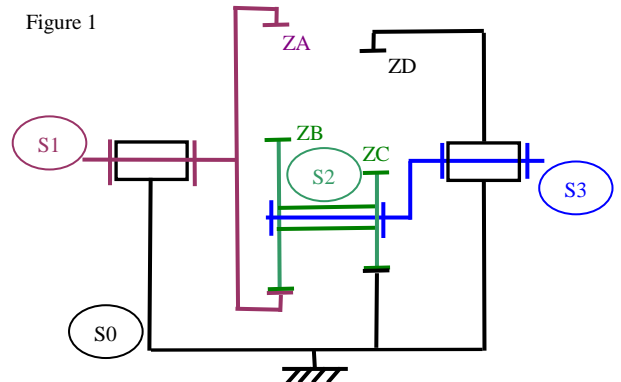
DS7-2014_CORRIGE

Partie A « Adaptateur à train épicycloïdal » [4 Pts]

1. Présentation du mécanisme

Le schéma cinématique de la fig.1 représente l'architecture d'un adaptateur à train épicycloïdal à deux couronnes ZA et ZD. On considère que le solide d'entrée est S1 (ZA) et le solide de sortie est S3. Les nombres de dents des différentes roues sont les suivants : ZA = 80 ; ZB = 46 ; ZC = 28 ; ZD = 62

Figure 1



2. Etude cinématique

Question A-1 : Par un tracé sur la figure 2 du document réponse, caractériser cet adaptateur : réducteur ou multiplicateur ? Inverseur ou non ?

Rapport de transmission :

Réducteur Multiplicateur

Sens de rotation :

Inverseur Non inverseur

Question A-2 : Calculer analytiquement le rapport de transmission de cet adaptateur en fonction des nombres de dents Zi.

On applique la formule de Willis pour un observateur lié au porte satellites S3 :

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^0 \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_B \cdot Z_D}$$

Avec : $\omega_{0/3} = -\omega_3$ et $\omega_{1/3} = \omega_1 - \omega_3$ La formule de Willis devient : $\frac{-\omega_3}{\omega_1 - \omega_3} = \frac{Z_A \cdot Z_C}{Z_B \cdot Z_D}$

On en déduit : $\Rightarrow -\omega_3(Z_B \cdot Z_D) = \omega_1(Z_A \cdot Z_C) - \omega_3(Z_A \cdot Z_C)$
 $\Rightarrow \omega_3(Z_A \cdot Z_C - Z_B \cdot Z_D) = \omega_1(Z_A \cdot Z_C)$

$$\Rightarrow \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{(Z_A \cdot Z_C)}{(Z_A \cdot Z_C - Z_B \cdot Z_D)} = \frac{80 \times 28}{80 \times 28 - 46 \times 62} = \frac{2240}{-612} = -3,66$$

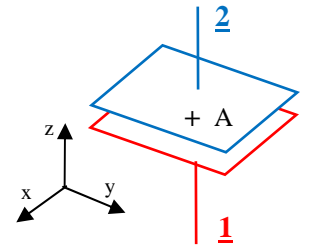
Partie B « Questions de cours sur les torseurs » [6 Pts]

Pour cette partie, on respectera les notations suivantes pour les torseurs : $\{V_{i/j}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{ij} & u_{ij} \\ \beta_{ij} & v_{ij} \\ \gamma_{ij} & w_{ij} \end{Bmatrix}$; $\{T_{i \rightarrow j}\} = \begin{Bmatrix} X_{ij} & L_{ij} \\ Y_{ij} & M_{ij} \\ Z_{ij} & N_{ij} \end{Bmatrix}$

Question B-1 : Donner la forme des torseurs cinématique et statique au point A (nom et position des composantes non nulles) de la liaison appui plan ci-contre :

$$\{V_{1/2}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u_{12} \\ 0 & v_{12} \\ \gamma_{12} & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & L_{21} \\ 0 & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}$$

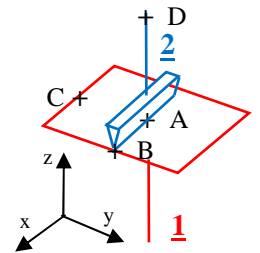


Question B-2 : Le torseur statique de la liaison linéaire annulaire (ci-contre) étant donné au point A, déplacer ce torseur aux points B, C et D.

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix} \text{ avec } \overrightarrow{AB} = b.\vec{x} ; \overrightarrow{AC} = c.\vec{y} ; \overrightarrow{AD} = d.\vec{z}$$

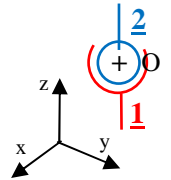
En appliquant la formule du champ de moment de torseur, on obtient :

$$\{T_{2 \rightarrow 1}\}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{21} + b.Z_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix} = \{T_{2 \rightarrow 1}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & -c.Z_{21} \\ 0 & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix} = \{T_{2 \rightarrow 1}\}_D = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{21} \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}$$



Question B-3 : Le torseur statique de la liaison rotule (ci-contre) étant donné en son centre O, déterminer les autres points de l'espace auxquels le torseur

conserve la même forme. $\{T_{2 \rightarrow 1}\}_O = \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ Z_{21} & 0 \end{Bmatrix}$



Quelque soit le déplacement envisagé, ce dernier fera apparaître des termes de moment.

En première approche, il n'y a qu'au point O que le torseur conserve sa forme.

En deuxième approche, on sait que ce torseur est un glisseur donc le torseur conservera sa forme en tout point de son axe central, c'est-à-dire la droite passant par O et parallèle à la résultante. $\overrightarrow{PO} \wedge \overrightarrow{R_{21}} = \vec{0}$

La puissance mécanique d'un moteur est fréquemment transmise à un récepteur par un accouplement homocinétique. Le plus souvent,

ce composant permet de transmettre un torseur d'action mécanique ayant la forme suivante : $\{T_{mot \rightarrow recept}\}_P = \begin{Bmatrix} 0 & L_{mr} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Question B-4 : En faisant des hypothèses sur la position d'un point M par rapport à P, quelle forme peut prendre ce torseur en ce point P.

Quelque soit le déplacement envisagé, ce dernier ne fera apparaître aucun nouveau terme de moment.

Ce torseur est valable en tout point.

Partie C : « Poussée du vent » [10 Pts]

1. Présentation du mécanisme

Afin de mesurer la poussée du vent sur des portes de garage de grandes dimensions, on envisage le dispositif expérimental schématisé sur la figure 3 ci-contre. Ce dispositif est constitué d'une porte (4) liée au sol (0) par une liaison pivot horizontale (H, x) et maintenue verticale par un câble (2). Une soufflerie permet de simuler l'action du vent sur la porte suivant l'axe y. On suppose que le torseur d'action mécanique du vent sur la porte au point G se réduit à une seule composante de résultante suivant l'axe y. Par ailleurs, le poids de la porte est noté P.

$$\{T(\text{vent} \rightarrow 4)\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{P} = -P \cdot \vec{z}$$

Le système de mesure est constitué d'un bras de levier (1) en pivot par rapport au sol et sur lequel sont « ancrés » (liaisons rotules) le câble (2) au point A et le capteur d'effort (3) au point B. Ce dernier mesure l'effort de traction, noté F, entre les points B et C. Quelque soit la valeur de F la distance BC reste constante, donc au cours des différents essais la position du point B est fixe par rapport au sol.

Pour les dimensions du système on utilisera les notations suivantes :

$$\vec{OA} = a \cdot \vec{y} ; \vec{OB} = b \cdot \vec{y} ; \vec{CB} = c \cdot \vec{z} ; \vec{OD} = d \cdot \vec{y} ; \vec{DE} = -l \cdot \vec{x} ;$$

$$\vec{DH} = -\frac{l}{2} \cdot \vec{x} ; \vec{HG} = \frac{h}{2} \cdot \vec{z} ; \vec{HF} = h \cdot \vec{z}$$

2. Travail demandé

Question C-1 : Compléter le graphe de structure de ce système (figure 4 du document réponse) en indiquant la nature des liaisons, le nombre d'inconnues statiques et les efforts extérieurs connus ou inconnus.

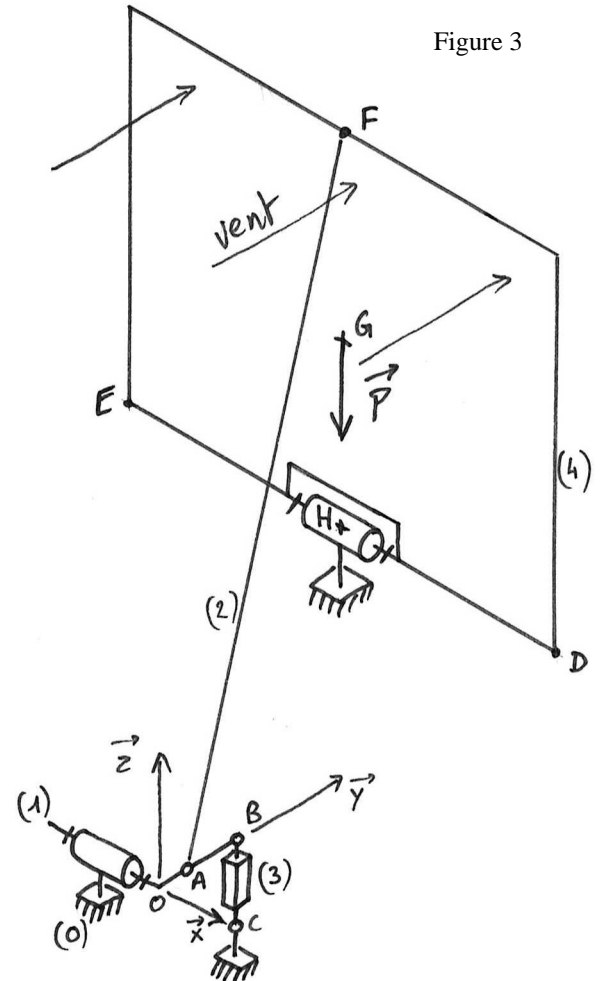
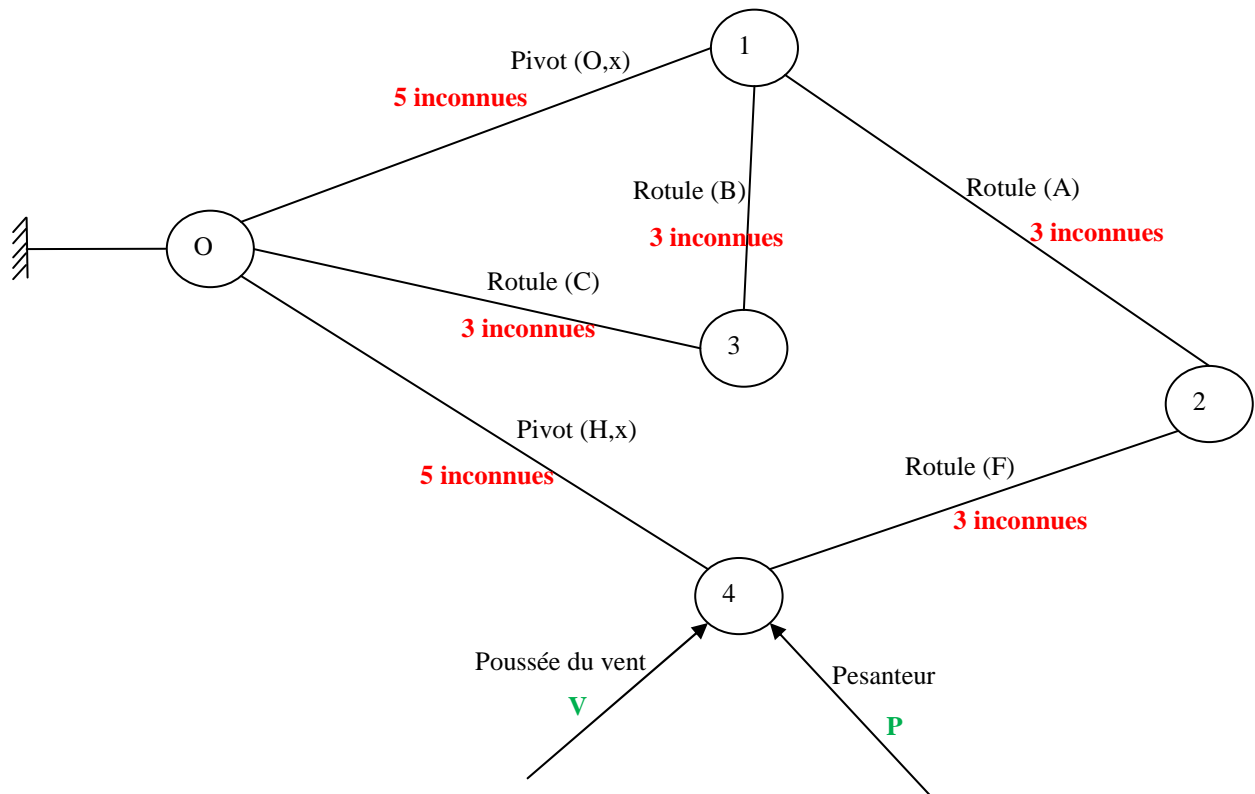


Figure 3



Question C-2 : Sachant que le câble (2) est en tension sous l'action de deux forces en A et F, en déduire les relations géométriques entre les composantes de la résultante $\vec{R12}$.

En isolant le câble 2, on constate qu'il est en équilibre sous l'action de 2 forces. On en déduit :

$$\vec{R12} // \vec{AF} \Rightarrow \frac{X12}{-l/2} = \frac{Y12}{d-a} = \frac{Z12}{h}$$

On en déduit 2 équations indépendantes :

$$\begin{cases} X12 = -\frac{l}{2h} \cdot Z12 & \langle eq1 \rangle \\ Y12 = \frac{d-a}{h} \cdot Z12 & \langle eq2 \rangle \end{cases}$$

Question C-3 : En remarquant la position particulière du solide (3) et en isolant le bras de levier (1), appliquer le principe fondamental de la statique au point O pour en déduire la tension dans le câble (2) en fonction de F.

On isole 1, cet ensemble est en équilibre sous trois actions mécaniques :

- $\{T0 \rightarrow 1\} = \begin{matrix} \begin{matrix} X01 & 0 \\ Y01 & M01 \\ Z01 & N01 \end{matrix} \\ O \end{matrix}$
- $\{T2 \rightarrow 1\} = \begin{matrix} \begin{matrix} X21 & 0 \\ Y21 & 0 \\ Z21 & 0 \end{matrix} \\ A \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} X21 & a \cdot Z21 \\ Y21 & 0 \\ Z21 & -a \cdot X21 \end{matrix} \\ O \end{matrix}$
- $\{T3 \rightarrow 1\} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{matrix} \\ B \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{matrix} 0 & -b \cdot F \\ 0 & 0 \\ -F & 0 \end{matrix} \\ O \end{matrix}$

En appliquant le PFS au point O, on obtient les 6 équations suivantes :

$$\begin{cases} X01 + X21 = 0 & \langle eq3 \rangle \\ Y01 + Y21 = 0 & \langle eq4 \rangle \\ Z01 + Z21 - F = 0 & \langle eq5 \rangle \\ a \cdot Z21 - b \cdot F = 0 & \langle eq6 \rangle \\ M01 = 0 & \langle eq7 \rangle \\ N01 - a \cdot X21 = 0 & \langle eq8 \rangle \end{cases}$$

Résolution :

Grâce au principe des actions mutuelles, on sait que $\begin{cases} X21 = -X12 \\ Y21 = -Y12 \\ Z21 = -Z12 \end{cases}$

$$\langle eq6 \rangle \Rightarrow Z21 = \frac{b}{a} F$$

$$\langle eq1 \rangle \Rightarrow X21 = \frac{-lb}{2ha} F$$

$$\langle eq2 \rangle \Rightarrow Y21 = \frac{(d-a)b}{ha} F$$

Les équations 3, 4, 5, 7, 8 permettent de déterminer les composantes du torseur $\{T0 \rightarrow 1\}$, or dans cette question seule la tension du câble est demandée :

$$T = \sqrt{X_{21}^2 + Y_{21}^2 + Z_{21}^2} = \frac{b}{a} F \sqrt{1 + \frac{(b-a)^2}{h^2} + \frac{l^2}{4h^2}} = \frac{b}{ah} F \underbrace{\sqrt{h^2 + (b-a)^2 + (l/2)^2}}_{\text{longueur du câble}=AF}$$

$$T = AF \cdot \frac{b}{ah} F$$

Question C-4 : En considérant les dimensions ci-dessous, vérifier que pour $F = 400 \text{ N}$ la tension dans le câble est proche de $T = 2150 \text{ N}$. $a = 0,2 \text{ m}$; $b = 0,5 \text{ m}$; $c = 0,1 \text{ m}$; $d = 6 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$; $l = 5 \text{ m}$

Calcul de la longueur du câble : $AF = \sqrt{h^2 + (d-a)^2 + (l/2)^2} = \sqrt{4^2 + 5,8^2 + 2,5^2} = 7,48 \text{ m}$

On en déduit : $T = 7,48 \times \frac{0,5}{0,2 \times 4} \times F \Rightarrow T \approx 4,67 \times F$

Pour $F=400 \text{ N}$, on a : $T \approx 1870 \text{ N}$

Question C-5 : Etablir la relation entre la poussée du vent V et la valeur d'effort donnée par le capteur F .

Pour relier F et V , il faut relier V et T . Pour cela on doit isoler un système sur lequel s'exercent les efforts du câble et du vent. On isole la porte 4, elle est en équilibre et soumise à 4 actions mécaniques extérieures :

$$\bullet \quad \{T_{0 \rightarrow 4}\}_H = \begin{Bmatrix} X_{04} & 0 \\ Y_{04} & M_{04} \\ Z_{04} & N_{04} \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \quad \{T_{\text{vent} \rightarrow 4}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & -\frac{h}{2}V \\ V & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_H$$

$$\bullet \quad \{T_g \rightarrow 4}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix}_H$$

$$\bullet \quad \{T_2 \rightarrow 4}\}_F = \begin{Bmatrix} X_{24} & 0 \\ Y_{24} & 0 \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{24} & -h.Y_{24} \\ Y_{24} & h.X_{24} \\ Z_{24} & 0 \end{Bmatrix}_H \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X_{24} = -X_{21} = \frac{lb}{2ha} F \\ Y_{24} = -Y_{21} = -\frac{(d-a)b}{ha} F \\ Z_{24} = -Z_{21} = -\frac{b}{a} F \end{cases}$$

En appliquant le PFS au point O, on obtient les 6 équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{04} + X_{24} = 0 & \langle \text{eq9} \rangle \\ Y_{04} + V + Y_{24} = 0 & \langle \text{eq10} \rangle \\ Z_{04} - P + Z_{24} = 0 & \langle \text{eq11} \rangle \\ -\frac{h}{2}V - h.Y_{24} = 0 & \langle \text{eq12} \rangle \\ M_{04} + h.X_{24} = 0 & \langle \text{eq13} \rangle \\ N_{04} = 0 & \langle \text{eq14} \rangle \end{cases}$$

Résolution :

$$\langle \text{eq12} \rangle \Rightarrow V = -2.Y_{24} = \frac{2(d-a)b}{ha} F \Rightarrow V = \frac{2(d-a)b}{ha} F$$