DS9-2014_CORRIGE

« Barrière automatique de parking »

La photo ci-contre et le schéma cinématique de la figure 1 représentent le mécanisme d'ouverture d'une barrière automatique de parking. Cette architecture est utilisée dans les barrières de faible portée (jusqu'à 4m). Le mouvement est commandé par un moto réducteur permettant de faire tourner la manivelle S1 autour de l'axe (A,X0). La rotation de la manivelle entraine celle de la lisse S2 autour de l'axe (O,X0).

1. Etude cinématique

Le schéma cinématique plan de la figure 2 donne le paramètrage de ce mécanisme de transformation de mouvement.

Les dimensions principales de ce mécanisme sont les suivantes :

OA = AB = e = 150 mm EA = CO = k = 90 mm

OG = q = 1,85 m OD = p = 4 m

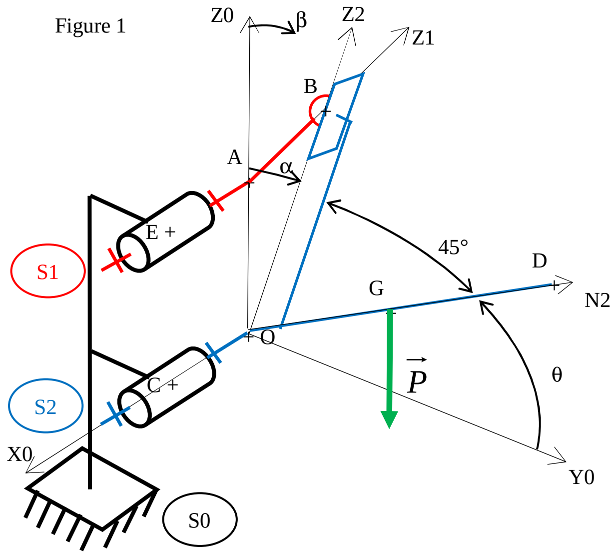
La longueur OB n'est pas constante : OB = λ

L'amplitude angulaire de rotation de la lisse est : $\theta \in [0°;+90°]$

On définit trois repères pour ce système :

- R0 (O, X0, Y0, Z0) lié à S0,
- R1 (A, X0, Y1, Z1) lié à S1,
- R2 (O, X0, Y2, Z2) lié à S2.

Figure 1



Question 1 : Déterminer l'amplitude de mouvement nécessaire pour la rotation de S1 afin de garantir le bon fonctionnement de la lisse.

Afin d'obtenir un angle d'ouverture de la lisse $\theta \in [0°;+90°]$, il faut une amplitude de $\alpha \in [-45°;+45°]$.

Etant donné que OA = AB, le triangle OAB est toujours isocèle en A, on en déduit aisément l'amplitude de rotation de la manivelle : $\boxed{\beta \in [-90°;+90°]}$

Question 2 : Déterminer la relation entre l'angle de rotation de la manivelle β et celui de la lisse θ.

Pour obtenir une relation entre α et β, il suffit d'écrire la boucle vectorielle suivante :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$$

$$\lambda.\overrightarrow{Z2} = e.\overrightarrow{Z0} + e.\overrightarrow{Z1}$$

$$\begin{pmatrix} -\lambda.\sin\alpha \\ \lambda.\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e.\sin\beta \\ e.\cos\beta \end{pmatrix}$$

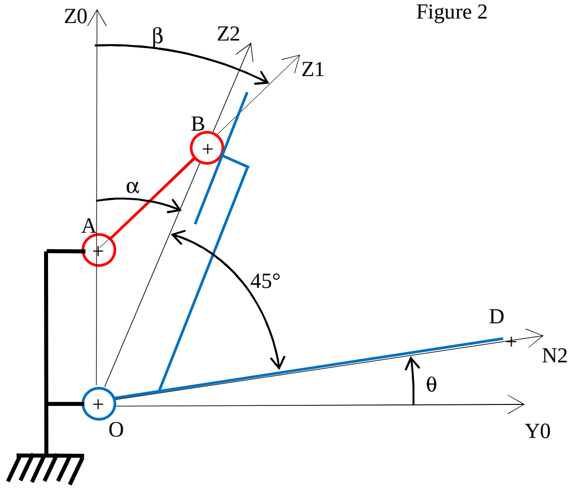
$$\begin{cases} \lambda.\sin\alpha = e.\sin\beta & \langle eq.1 \rangle \\ \lambda.\cos\alpha = e + e.\cos\beta & \langle eq.2 \rangle \end{cases}$$

On en déduit aisément : $\dfrac{\langle eq.1 \rangle}{\langle eq.2 \rangle} \Rightarrow \dfrac{\lambda.\sin\alpha}{\lambda.\cos\alpha} = \dfrac{e.\sin\beta}{e + e.\cos\beta}$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\beta}{1+\cos\beta} \quad \text{avec} \quad \alpha = \theta - \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}\right) + \frac{\pi}{4}}$$

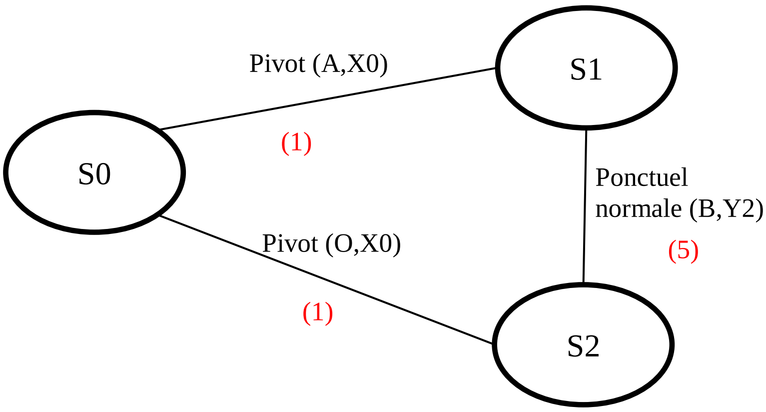
Figure 2



Question 3 : Tracer le graphe de structure de ce mécanisme et vérifier qu'il est isostatique.

Sur le graphe de structure, on constate :

Nc = 7 et γ = 1



La lecture du schéma cinématique permet de déduire m = 1 (en bloquant la rotation de S1/S0, on bloque tous les mouvements des différents solides du mécanisme).

On en déduit : h = m + 6γ - Nc

h = 1 + 6 – 7 = 0

Le mécanisme est bien isostatique.

Question 4 : En négligeant les phases d'accélération et de décélération, en considérant que la lisse tourne à vitesse constante et que le temps d'ouverture est de t = 1,25s, déterminer la vitesse du point D situé à son extrémité.

En considérant un temps d'ouverture de 1,25 s pour un ¼ tr, on peut en déduire une vitesse de rotation de :

$$\omega = \frac{2\pi}{5} \approx 1{,}26\ rd/s$$

On en déduit la vitesse tangentielle du point D : $\boxed{\left\|\overrightarrow{V(D,2/0)}\right\| = p.\omega = 4 \times \frac{2\pi}{5} \approx 5{,}04\ m/s}$

2. Etude Statique

Le poids des différentes pièces est négligeable par rapport à celui de la lisse : $\vec{P} = -P.\overrightarrow{Z0}$

Le motoréducteur (non représenté) exerce une action mécanique sur la manivelle S2 représentée par le torseur couple :

$$\{Tm\} = {}_{E}\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ Cm.\overrightarrow{X0} \end{matrix} \right\}$$

Question 5 : Déterminer le torseur d'action mécanique de S1 → S2 pour garantir l'équilibre de la lisse. Exprimer ses composantes au point B en fonction des dimensions, des angles et de P.

On isole S2, ce solide est en équilibre sous 3 actions mécaniques :

$$\{T_{1\to 2}\} = {}_{B}\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y12 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\}_{R2} = {}_{B}\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y12.\cos\alpha & 0 \\ Y12.\sin\alpha & 0 \end{matrix} \right\}_{R0} = {}_{O}\left\{ \begin{matrix} 0 & -\lambda.Y12 \\ Y12.\cos\alpha & 0 \\ Y12.\sin\alpha & 0 \end{matrix} \right\}_{R0} \text{ car } \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R12} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda.\sin\alpha \\ \lambda.\cos\alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y12.\cos\alpha \\ Y12.\sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\{T_{g\to 2}\} = {}_{G}\left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{matrix} \right\}_{R0} = {}_{O}\left\{ \begin{matrix} 0 & -P.q.\cos\theta \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{matrix} \right\}_{R0} \text{ car } \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ q.\cos\theta \\ q.\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix}$$

$$\{T_{0\to 2}\} = {}_{O}\left\{ \begin{matrix} X02 & 0 \\ Y02 & M02 \\ Z02 & N02 \end{matrix} \right\}_{R0}$$

En appliquant le PFS au point O, on obtient : $\begin{cases} X02 = 0 & \langle éq.3 \rangle \\ Y02 + Y12.\cos\alpha = 0 & \langle éq.4 \rangle \\ Y12.\sin\alpha - P + Z02 = 0 & \langle éq.5 \rangle \\ -\lambda.Y12 - P.q.\cos\theta = 0 & \langle éq.6 \rangle \\ M02 = 0 & \langle éq.7 \rangle \\ N02 = 0 & \langle éq.8 \rangle \end{cases}$

$\langle éq.6 \rangle \Rightarrow \boxed{Y12 = \dfrac{-P.q.\cos\theta}{\lambda}}$

Avec $\langle éq.1 \rangle^2 + \langle éq.2 \rangle^2 \Rightarrow \boxed{\lambda = \sqrt{(e.\sin\beta)^2 + (e + e.\cos\beta)^2} = e.\sqrt{2 + 2\cos\beta}}$

Question 6 : Déterminer les composantes du torseur de la liaison pivot entre S0 et S1 ainsi que le couple moteur Cm pour maintenir la lisse en équilibre.

On isole S1, ce solide est en équilibre sous 3 actions mécaniques :

$\{T_{2\to1}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y21.\cos\alpha & 0 \\ Y21.\sin\alpha & 0 \end{Bmatrix}_{R0} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & -e.Y21.\cos(\beta-\alpha) \\ Y21.\cos\alpha & 0 \\ Y21.\sin\alpha & 0 \end{Bmatrix}_{R0}$ car $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{R21} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e.\sin\beta \\ e.\cos\beta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Y21.\cos\alpha \\ Y21.\sin\alpha \end{pmatrix}$

$\{T_m\} = {}_{\forall Pt}\begin{Bmatrix} 0 & Cm \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{R0}$ car torseur couple

$\{T_{0\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X01 & 0 \\ Y01 & M01 \\ Z01 & N01 \end{Bmatrix}_{R0}$

En appliquant le PFS au point A, on obtient : $\begin{cases} X01 = 0 & \langle éq.9 \rangle \\ Y01 + Y21.\cos\alpha = 0 & \langle éq.10 \rangle \\ Y21.\sin\alpha + Z01 = 0 & \langle éq.11 \rangle \\ Cm - e.Y21.\cos(\beta-\alpha) = 0 & \langle éq.12 \rangle \\ M01 = 0 & \langle éq.13 \rangle \\ N01 = 0 & \langle éq.14 \rangle \end{cases}$

Or, on connait : $Y21 = -Y12 = \dfrac{P.q.\cos\theta}{\lambda}$

On en déduit : $\boxed{\{T_{0\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} O & 0 \\ \dfrac{-P.q.\cos\theta}{\lambda.\cos\alpha} & 0 \\ \dfrac{-P.q.\cos\theta}{\lambda.\sin\alpha} & 0 \end{Bmatrix}_{R0}}$ et $\boxed{Cm = \dfrac{e.P.q.\cos\theta.\cos(\beta-\alpha)}{\lambda}}$

3. Centre de gravité

La lisse est constituée de différentes pièces, une modélisation simplifiée est donnée en figure 3. Celle-ci est constituée de 2 pièces :

- Un Té en acier (ρ_F = 7800 kg/m^3)
- Un Tube en aluminium (ρ_A = 2700 kg/m^3)

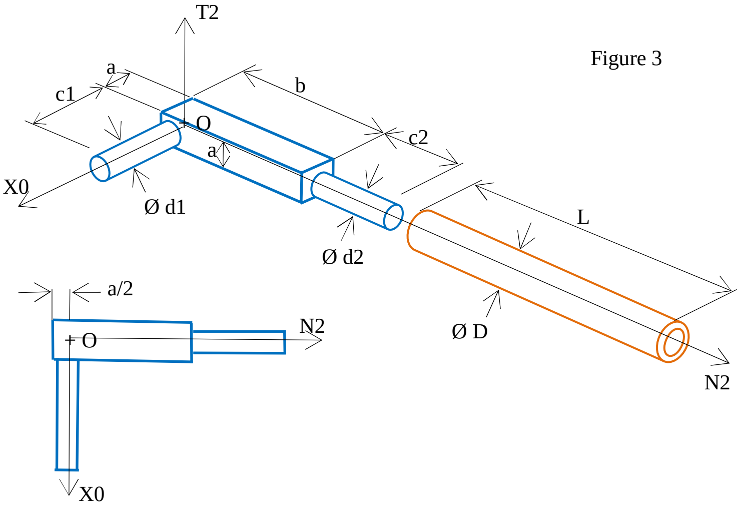
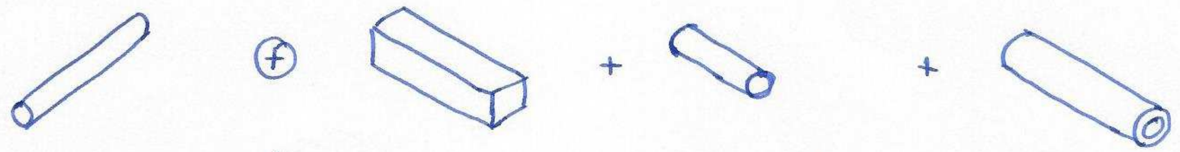


Figure 3

Les dimensions sont les suivantes :
a = 80 mm ; b = 250 mm ; c1 = 450 mm
ø d1 = 30 mm ; c2 = 200 mm ; ø d2 = 60 mm
L = 3790 mm ; ø D = 66 mm

Question 7 : Calculer la masse M de cette lisse ainsi que la position de son centre de gravité $\overrightarrow{OG}$ dans le repère (O,X0,N2,T2).

On peut décomposer le solide de la façon suivante :



$$M_1 = \rho_F \times \frac{\pi}{4} d_1^2 \times c_1 \simeq 2{,}481 \text{ kg}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \begin{pmatrix} \frac{a+c_1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}265 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \rho_F \times a^2 \cdot b \simeq 12{,}480 \text{ kg}$$

$$\overrightarrow{OG_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b-a}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}085 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \rho_F \times \frac{\pi d_2^2}{4} \times c_2 \simeq 4{,}410 \text{ kg}$$

$$\overrightarrow{OG_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ b-\frac{a}{2}+\frac{c_2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}310 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \rho_A \frac{\pi}{4}\left(D^2 - d_2^2\right) L \simeq 6{,}076 \text{ kg}$$

$$\overrightarrow{OG_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ b-\frac{a}{2}+\frac{L}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2{,}105 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A.N. $\Rightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{M_1\overrightarrow{OG_1} + M_2\overrightarrow{OG_2} + M_3\overrightarrow{OG_3} + M_4\overrightarrow{OG_4}}{M_1+M_2+M_3+M_4}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0{,}0258 \\ 0{,}5980 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{M = 25{,}447 \text{ kg}}$

4. Modification de la cinématique

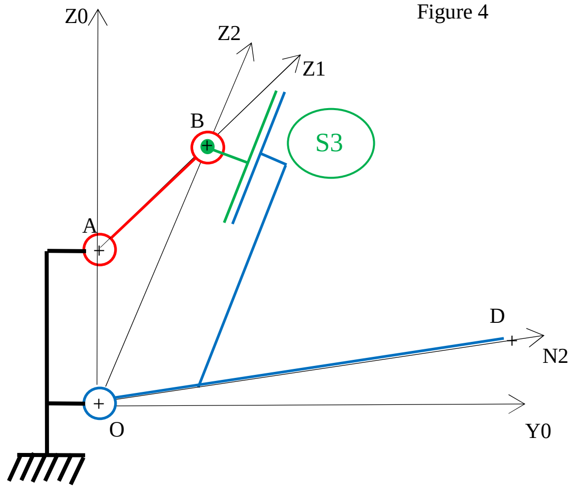
Dans le cas des lisses ayant une plus grande portée, il est préférable d'éviter les liaisons à faible surface de contact pour éviter l'usure prématurée. On envisage deux solutions alternatives au contact ponctuel entre S1 et S2 :

- La solution « appui plan » (figure 4) qui fait intervenir une pièce S3 intermédiaire,
- La solution « glissière » (figure 5) qui fait intervenir un coulisseau S4,

Question 8 : Montrer que la solution « appui plan » est hyperstatique d'ordre 1. Indiquer quelle sera la conséquence de cet hyperstatisme sur le contact de l'appui plan.

Le graphe de structure fait apparaître une boucle et 7 inconnues cinématiques.
La lecture du schéma permet de comprendre que le degré de mobilité de ce mécanisme est de 2. En effet, même si on bloque la rotation de S1/S2, S3 conserve une translation suivant Z0 par rapport à S1.
On en déduit : h = 2 + 6 – 7 = 1
La conséquence de cet hyperstatisme est que le contact appui plan ne se fait en réalité que sur une ligne.

Figure 4



Solution « Appui plan »

Question 9 : Modifier la liaison pivot glissant entre S1 et S3 pour rendre ce mécanisme isostatique.

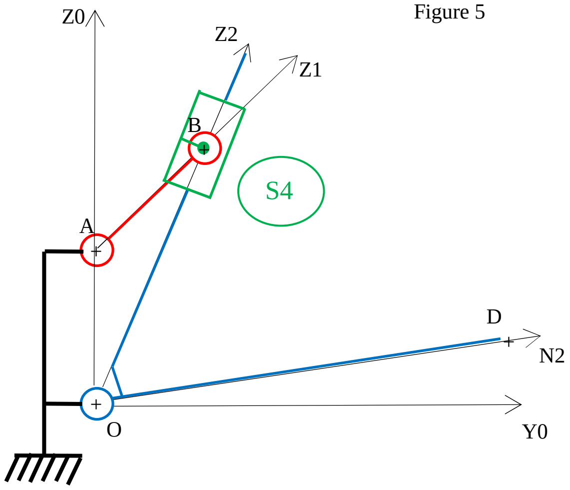
Pour résoudre cet hyperstatisme, il faut redonner la possibilité à l'appui plan de s'orienter librement. Il est judicieux de remplacer la liaison pivot glissant entre S1 et S3 par une rotule de centre B.

Dans cette nouvelle configuration, on aura :
m = 2 (RZ de S1/S0 et rotation propre de S3)
$\gamma = 1$
Nc = 8
h = 2 + 6 – 8 = 0

Question 10 : Déterminer le degré de mobilité et d'hyperstatisme de la solution « glissière ».

Dans cette configuration, on a :
m = 1 (RZ de S1/S0)
$\gamma = 1$
Nc = 5
h = 1 + 6 – 5 = 2

Figure 5



Solution « Glissière »