DS1-2015_CORRIGE

Partie A : « Calcul vectoriel » [11 pt]

1. Présentation des données.

Sur la figure 1 ci-contre sont définis deux repères orthonormés directs R0 (O, x, y, z) et R1 (O, x1, y, z1).
On définit également trois vecteurs par leurs coordonnées respectives :

$\vec{U} = 2\vec{x} - 1\vec{y} - 2\vec{z}$; $\vec{V} = -2\vec{x} - 4\vec{y} + 1\vec{z}$; $\vec{W} = 2\vec{x1} + 3\vec{z1}$

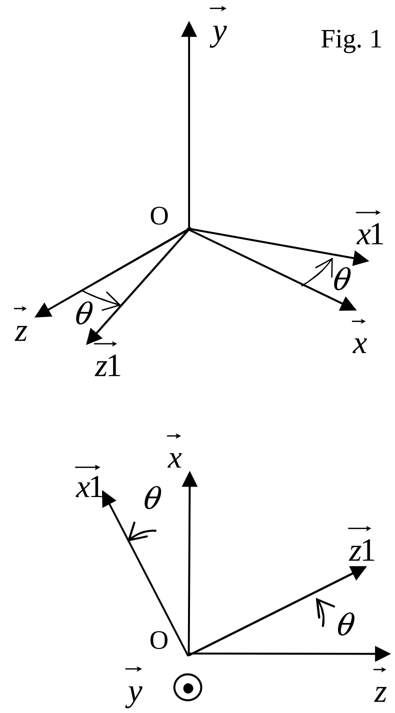


Fig. 1

2. Travail demandé :

Question A-1 : Effectuer les calculs suivants :

$$\vec{U}+\vec{V} \quad ; \quad \vec{U}\cdot\vec{V} \quad ; \quad \vec{U}\wedge\vec{V} \quad ; \quad \|\vec{U}\| \quad ; \quad \|\vec{V}\| .$$

$$\vec{U}+\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{R0} + \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}_{R0}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{R0} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{R0} = -4+4-2 = -2$$

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$$

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}_{R0} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}_{R0}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$$

Question A-2 : Démontrer que $\vec{U}$ et $\vec{V}$ ne sont pas perpendiculaires.

Etant donné que le produit scalaire de ces deux vecteurs n'est pas nul, ils ne peuvent pas être perpendiculaires.

Question A-3 : Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{x1}$ et $\vec{z1}$ dans le repère R0.

$$\begin{cases} \vec{x1} = \cos\theta.\vec{x} - \sin\theta.\vec{z} \\ \vec{z1} = \sin\theta.\vec{x} + \cos\theta.\vec{z} \end{cases}$$

Question A-4 : En déduire les coordonnées de $\vec{W}$ dans le repère R0.

$$\vec{W} = 2\vec{x1} + 3\vec{z1} = 2\left(\cos\theta.\vec{x} - \sin\theta.\vec{z}\right) + 3\left(\sin\theta.\vec{x} + \cos\theta.\vec{z}\right) = \begin{pmatrix} 2.\cos\theta + 3.\sin\theta \\ 0 \\ 3.\cos\theta - 2.\sin\theta \end{pmatrix}_{R0}$$

Question A-5 : Calculer les produits suivants :

$$\vec{x}\cdot\vec{x1} \quad ; \quad \vec{z1}\cdot\vec{x} \quad ; \quad \vec{x1}\cdot\vec{z} \quad ; \quad \vec{x1}\cdot\vec{y} \; ; \; \vec{V}\cdot\vec{y} \; ; \; \vec{W}\cdot\vec{x}$$

$\vec{x}\cdot\vec{x1} = \cos\theta$	$\vec{z1}\cdot\vec{x} = \cos\left(\pi/2 - \theta\right) = \sin\theta$	$\vec{x1}\cdot\vec{z} = \cos\left(\pi/2 + \theta\right) = -\sin\theta$
$\vec{x1}\cdot\vec{y} = 0$	$\vec{V}\cdot\vec{y} = -4$	$\vec{W}\cdot\vec{x} = 2.\cos\theta + 3.\sin\theta$

$\vec{x} \wedge \vec{x1}$; $\vec{z1} \wedge \vec{x}$; $\vec{x1} \wedge \vec{z}$; $\vec{x1} \wedge \vec{y}$; $\vec{V} \wedge \vec{y}$; $\vec{W} \wedge \vec{x}$

$\vec{x} \wedge \vec{x1} = \sin\theta.\vec{y}$	$\vec{z1} \wedge \vec{x} = \sin\left(\pi/2 - \theta\right).\vec{y} = \cos\theta.\vec{y}$	$\vec{x1} \wedge \vec{z} = -\sin\left(\pi/2 + \theta\right).\vec{y} = -\cos\theta.\vec{y}$
$\vec{x1} \wedge \vec{y} = \vec{z1}$	$\vec{V} \wedge \vec{y} = \vec{x} - 2.\vec{z}$	$\vec{W} \wedge \vec{x} = (3.\cos\theta - 2.\sin\theta).\vec{y}$

Question A-6 : Déterminer un vecteur unitaire $\vec{u}$ ayant même direction et même sens que $\vec{U}$.

$\vec{u} = \dfrac{\vec{U}}{\left\|\vec{U}\right\|}$ avec $\left\|\vec{U}\right\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$ d'où $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}_{R0}$

Question A-7 : Déterminer un vecteur unitaire $\vec{j}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{z}$ tel que la base $\left(\vec{u}, \vec{j}, \vec{z}\right)$ soit directe.

$$\vec{j} = \frac{\vec{z} \wedge \vec{u}}{\left\|\vec{z} \wedge \vec{u}\right\|} = \frac{3}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}_{R0}$$

Question A-8 : Déterminer l'angle β, défini entre les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

En utilisant le produit scalaire :

On sait qu'il est possible de calculer le produit scalaire de deux manières :

avec les coordonnées ou avec les normes : $\vec{U} \cdot \vec{V} = -2$ $\vec{U} \cdot \vec{V} = \left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\cos\beta$

Avec $\left\|\vec{U}\right\| = 3$ et $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21} = \sqrt{3}.\sqrt{7}$

On en déduit : $\cos\beta = \dfrac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|} = \dfrac{-2}{3\sqrt{21}} = -0{,}1455$

Etant donné que cet angle n'est pas défini dans un plan orienté, on ne retiendra que la solution positive :
$\beta = \arccos(-0{,}1455) = 98{,}36°$

En utilisant le produit vectoriel :

On sait que : $\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}_{R0}$ On peut en déduire : $\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| = \sqrt{81+4+100} = \sqrt{185} = \sqrt{5}.\sqrt{37}$

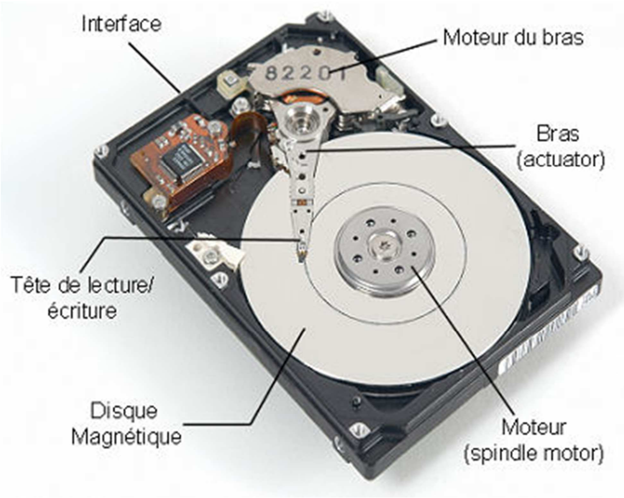
Or on sait que la norme de ce produit vectoriel s'écrit également : $\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\| = \left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|.\sin\beta$

Avec $\left\|\vec{U}\right\| = 3$ et $\left\|\vec{V}\right\| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21} = \sqrt{3}.\sqrt{7}$

On en déduit : $\sin\beta = \dfrac{\left\|\vec{U} \wedge \vec{V}\right\|}{\left\|\vec{U}\right\|.\left\|\vec{V}\right\|} = \dfrac{\sqrt{185}}{3\sqrt{21}} = 0{,}9894$

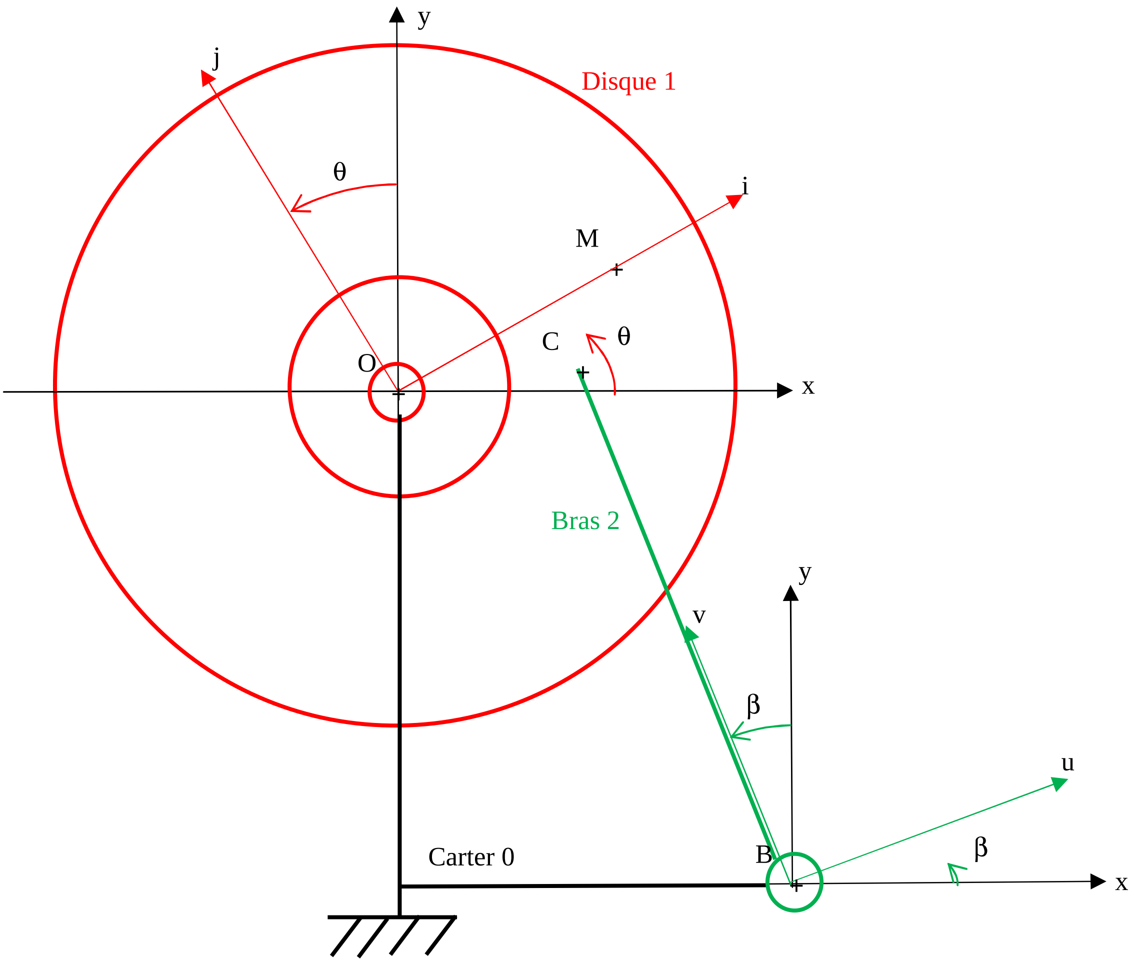
Etant donné que cet angle n'est pas défini dans un plan orienté, on ne retiendra que les solutions positives :
$\beta = \arcsin(0{,}9894) = 81{,}65°$ *ou* $98{,}36°$

Partie B : « Disque Dur »



Présentation du mécanisme

Les disques durs utilisés pour le stockage de masse des fichiers dans les ordinateurs sont constitués de disques tournants à vitesse constante et de bras de lecture.
L'étude suivante porte sur le disque dur simplifié de la figure ci-après.
Le système est constitué d'un seul disque (1) en rotation autour de l'axe (O,z) à la vitesse de rotation constante de N = 5400 tr/min. les informations sont stockées sur des pistes (cercles concentriques de centre O) distantes de 1 mm pour les rayons allant de 16 à 45 mm inclus (30 pistes). Chaque piste est découpée en 16 secteurs angulaires (cluster).
Pour pouvoir lire le bit du point M de la surface du disque, on oriente le bras (2) pour placer la tête de lecture (point C) sur la piste correspondant à celle du point M. Dans la réalité, la tête de lecture n'est pas en contact avec le disque. L'espace entre ces deux pièces est de l'ordre de 15 microns.



On définit trois repères :

- R0 (O, x, y, z) lié à S0
- R1 (O, i, j, z) permettant le repérage en coordonnées polaires du point M par rapport à R0
- R2 (B, u, v, z) lié à (2)

Le repérage de M dans le disque (1) est donné par les deux coordonnées polaires θ et ρ :

$\overrightarrow{OM} = \rho.\vec{i}$ avec $\vec{i} = \cos\theta.\vec{x} + \sin\theta.\vec{y}$

Les dimensions du système sont les suivantes : $\overrightarrow{OB} = a.\vec{x} - b\vec{y}$ avec a = 52 mm et b = 65 mm ; $\overrightarrow{BC} = c.\vec{v}$ avec c = 74 mm

Travail demandé

Pour les questions B-1 à B-5, on considère que le disque n'est pas en rotation.

Question B-1 : A partir des coordonnées polaires du point M, déterminer ses coordonnées cartésiennes dans le repère R0.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho.\cos\theta.\vec{x} + \rho.\sin\theta.\vec{y}}$$

Question B-2 : Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans le repère R0.

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}_{R0} + \begin{pmatrix} -c.\sin\beta \\ c.\cos\beta \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} a - c.\sin\beta \\ -b + c.\cos\beta \end{pmatrix}_{R0}}$$

Question B-3 : Calculer la distance entre les points O et B.

Il suffit de calculer la norme de $\boxed{\overrightarrow{OB}}$: $\boxed{\left\|\overrightarrow{OB}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{52^2 + 65^2} \approx 83\,mm}$

Question B-4 : Lorsque les points C et M sont confondus, montrez que l'on obtient les deux équations scalaires suivantes : $\begin{cases} \rho.\cos\theta = a - c.\sin\beta & \langle éq.1\rangle \\ \rho.\sin\theta = -b + c.\cos\beta & \langle éq.2\rangle \end{cases}$

Il suffit de traduire que : $\boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC}}$

On obtient : $\boxed{\begin{pmatrix} \rho.\cos\theta \\ \rho.\sin\theta \end{pmatrix}_{R0} = \begin{pmatrix} a - c.\sin\beta \\ -b + c.\cos\beta \end{pmatrix}_{R0} \Rightarrow \begin{cases} \rho.\cos\theta = a - c.\sin\beta \\ \rho.\sin\theta = -b + c.\cos\beta \end{cases}}$

Question B-5 : En déduire les relations : $\rho = f(\beta)$ *et* $\theta = f(\beta)$

Pour faire « disparaître » l'angle θ des équations, on calcule :

$$\langle éq.1\rangle^2 + \langle éq.2\rangle^2 \Rightarrow \rho^2.(\cos\theta^2 + \sin\theta^2) = a^2 - 2ac.\sin\beta + c^2.\sin\beta^2 + b^2 - 2bc.\cos\beta + c^2.\cos\beta^2$$

On en déduit : $\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac.\sin\beta - 2bc.\cos\beta$ $\boxed{\Rightarrow \rho = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac.\sin\beta}}$

Pour faire « disparaître » la longueur ρ des équations, on calcule :

$$\frac{\langle éq.2\rangle}{\langle éq.1\rangle} \Rightarrow \frac{\rho.\sin\theta}{\rho.\cos\theta} = \frac{a - c.\sin\beta}{-b + c.\cos\beta} \qquad \Rightarrow \tan\theta = \frac{a - c.\sin\beta}{-b + c.\cos\beta}$$

On en déduit : $\boxed{\theta = \arctan\left(\frac{a - c.\sin\beta}{-b + c.\cos\beta}\right)}$

Question Bonus : Calculer les valeurs numériques de la vitesse et de l'accélération d'un point M situé sur la piste la plus éloignée du centre de rotation (rayon = 46 mm), lorsque le disque tourne à sa vitesse nominale : N = 5400 tr/min.

En se souvenant du cours de sciences physiques ou de sciences de l'ingénieur de l'an dernier, on peut calculer la vitesse et l'accélération d'un point ayant un mouvement de rotation à vitesse constante par les deux formules suivantes :

<u>Pour la vitesse :</u> $\boxed{V = R.\omega}$

Où V est la vitesse tangentielle [m/s] ; R est le rayon de rotation [m] ; ω est la vitesse de rotation [rd/s]

On peut calculer la vitesse de rotation à partir de la fréquence de rotation avec : $\boxed{\omega = \dfrac{2\pi.N}{60}}$

Dans notre cas R = 46 mm et N = 5400 tr/min : $\Rightarrow \omega = \dfrac{2\pi.5400}{60} \approx 565{,}5\ rd/s$

On en déduit : $\boxed{V = 46.10^{-3} \times 565{,}5 = 26{,}01\ m/s}$

<u>Pour l'accélération radiale :</u> $\boxed{a_R = \dfrac{V^2}{R}}$ (formule de physique) ou $\boxed{\Gamma_R = R.\omega^2}$ (formule de SI)

L'accélération radiale ou « centrifuge » est notée différemment en physique et en SI mais c'est évidemment la même grandeur et ces deux formules donnent le même résultat en [m/s²] :

$\boxed{a_R = \dfrac{26{,}01^2}{46.10^{-3}} \approx 14706\ m/s^2}$ Ou $\boxed{\Gamma_R = 46.10^{-3} \times 565{,}5^2 \approx 14710\ m/s^2}$

Ce qui correspond à 1400 fois l'accélération de la pesanteur !!