DS5-2015_CORRIGE

Partie A : « Réducteur de positionneur d'antenne »

1. Présentation du mécanisme

La figure 1 ci-dessous représente la cinématique d'un réducteur à engrenages permettant de très fortes réductions de vitesse. Ce genre de dispositif est utilisé pour obtenir des vitesses de sorties très lentes, utilisées notamment pour positionner des antennes ou pour assurer le suivi du soleil ou d'objets célestes. La roue Z1 est reliée au moteur électrique, le solide 1 constitue le solide d'entrée.

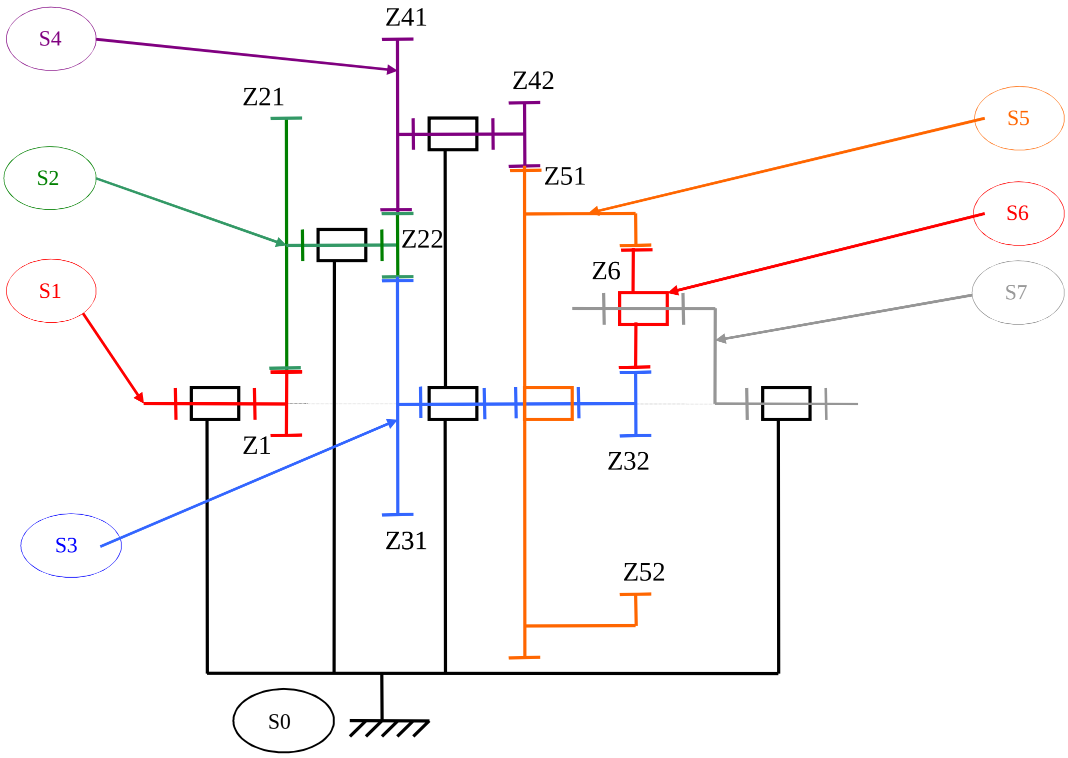
Il est constitué de 2 parties réductrices :

- Un réducteur à axes fixes (solides 1-2-3-4-5) pour donner à la couronne 5 et au planétaire 3 des rotations inverses.
- Un réducteur à train épicycloïdal (solides 3-6-5-7). Le mouvement de sortie de ce réducteur se fait sur le porte satellites 7.

Les nombres de dents sont les suivants :

Z1 = Z22 = Z32 = Z42 = 12 Z21 = 36 Z31 = 48 Z41 = 24 Z51 = 96 Z52 = 54 Z6 = 21

Figure 1 : schéma cinématique du réducteur de positionneur d'antenne (attention ce schéma n'est pas à l'échelle)



2. Etude cinématique

Question A-1 : Déterminer les rapports de transmission suivants : R13 = $\frac{\omega 3}{\omega 1}$ et R15 = $\frac{\omega 5}{\omega 1}$

$$\boxed{\frac{\omega 3}{\omega 1}=(-1)^2\frac{Z1\cdot Z22}{Z21\cdot Z31}=\frac{12\times 12}{36\times 48}=\frac{1}{12}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\omega 5}{\omega 1}=(-1)^3\frac{Z1\cdot Z22\cdot Z42}{Z21\cdot Z41\cdot Z51}=-\frac{12\times 12\times 12}{36\times 24\times 96}=-\frac{1}{48}}$$

Question A-2 : En déduire $\omega 1$ si $\omega 3=12\ rd/s$ et $\omega 5=-3\ rd/s$.

On vérifie que : $\boxed{\omega 1=12\times\omega 3=144\ rd/s}$

Et que : $\boxed{\omega 1=-48\times\omega 5=144\ rd/s}$

Question A-3 : En appliquant la formule de Willis par rapport au porte satellites 7, déterminer la relation entre $\omega 7$, $\omega 3$ et $\omega 5$.

$$\frac{\omega 3/7}{\omega 5/7}=(-1)^1\frac{Z52\cdot Z6}{Z6\cdot Z32}=-\frac{Z52}{Z32} \quad avec \quad \begin{Bmatrix}\omega 3/7=\omega 3-\omega 7\\ \omega 5/7=\omega 5-\omega 7\end{Bmatrix}$$

On en déduit : $\omega 3\cdot Z32-\omega 7\cdot Z32=-\omega 5\cdot Z52+\omega 7\cdot Z52$ $\boxed{\Rightarrow \quad \omega 3\cdot Z32+\omega 5\cdot Z52=\omega 7\cdot(Z52+Z32)}$

Question A-4 : Calculer la valeur numérique du rapport de transmission de ce réducteur : $R = \dfrac{\omega 7}{\omega 1}$.

En substituant $\omega 3$ et $\omega 5$ par les expressions trouvées en question D-1 dans l'expression de la question D-4, on en déduit : $R13 \cdot \omega 1 \cdot Z32 + R15 \cdot \omega 1 \cdot Z52 = \omega 7 \cdot (Z52 + Z32)$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\omega 7}{\omega 1} = \frac{R13 \cdot Z32 + R15 \cdot Z52}{Z52 + Z32} = \frac{\frac{1}{12} \times 12 - \frac{1}{48} \times 54}{12 + 54} \approx -\frac{1}{528} \approx 1{,}89 \cdot 10^{-3}}$$

Partie B : « Robot de chargement - déchargement »

1. Présentation du mécanisme

Le schéma cinématique de la fig.2 représente l'architecture d'un robot de chargement – déchargement. Ce mécanisme est constitué de trois solides principaux :

- le bras S1 en liaison pivot d'axe (O,Y0) par rapport à S0 et de repère R1(O,X1,Y0,Z1)
- l'avant-bras S2 en liaison pivot d'axe (A,Z1) par rapport à S1 et de repère R2(A,X2,Y2,Z1)
- la coulisse S3 en liaison glissière d'axe (A,Y2) par rapport à S2 et de repère R3(B,X2,Y2,Z1)

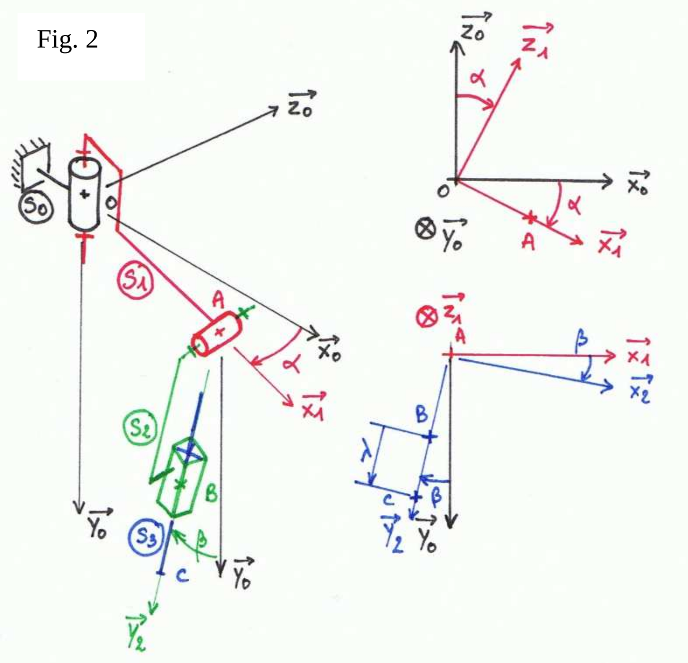
Trois moteurs permettent de commander les trois liaisons de ce robot. Il en résulte que les paramètres α, β et λ sont variables et indépendants.

La géométrie du système est la suivante :

$\overrightarrow{OA} = a\vec{x}_1$; $\overrightarrow{AB} = b\vec{y}_2$ et $\overrightarrow{BC} = \lambda\vec{y}_2$

(a et b sont des constantes positives)

Fig. 2



2. Etude cinématique

Question B-1 : Calculer $\overrightarrow{V(B,2/0)}$.

On peut calculer cette vitesse en dérivant le vecteur position :

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \left[\frac{d\left(\overrightarrow{OB}\right)}{dt}\right]_{R0} = \left[\frac{d\ a.\overrightarrow{X1}}{dt}\right]_{R1} + \overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge a.\overrightarrow{X1} + \left[\frac{d\ b.\overrightarrow{Y2}}{dt}\right]_{R2} + \overrightarrow{\Omega 2/0} \wedge b.\overrightarrow{Y2}$$

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} \wedge a.\overrightarrow{X1} + \left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} + \dot{\beta}.\overrightarrow{Z1}\right) \wedge b.\overrightarrow{Y2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(B,2/0)} = -a\dot{\alpha}.\overrightarrow{Z1} + b\dot{\alpha}.\sin\beta.\overrightarrow{Z1} - b\dot{\beta}.\overrightarrow{X2}}$$

Ou en utilisant une relation de champ des vecteurs vitesse ou encore une composition des vitesses :

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = \overrightarrow{V(A,2/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega 2/0}$$

$$\overrightarrow{V(B,2/0)} = -a\dot{\alpha}.\overrightarrow{Z1} - b.\overrightarrow{Y2} \wedge \left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} + \dot{\beta}.\overrightarrow{Z1}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{V(B,2/0)} = -a\dot{\alpha}.\overrightarrow{Z1} + b\dot{\alpha}.\sin\beta.\overrightarrow{Z1} - b\dot{\beta}.\overrightarrow{X2}}$$

Question B-2 : Montrer que $\overrightarrow{\Gamma(B \in 1/0)} = (b.\sin\beta - a)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} + (b.\sin\beta - a)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1}$

Cette accélération est délicate à calculer car le point B n'appartient pas physiquement au solide 1. La méthode la plus sûre est de la calculer en appliquant la formule de champ des accélérations :

$$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A,1/0)} + \left(\overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \overrightarrow{BA}\right) \wedge \overrightarrow{\Omega 1/0} + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{d\ \overrightarrow{\Omega 1/0}}{dt}\right]_{R0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1} + \left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} \wedge (-b)\overrightarrow{Y2}\right) \wedge \dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} - b.\overrightarrow{Y2} \wedge \left[\frac{d\ \dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0}}{dt}\right]_{R0}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = -a\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - a\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1} + b.\sin\beta.\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} + b.\sin\beta.\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1}$$

En factorisant les termes, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(B \in 1/0)} = (b.\sin\beta - a)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} + (b.\sin\beta - a)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1}}$$

Mais on peut également éviter ce calcul, en remarquant que pour la rotation de S1/S0, le rayon de rotation du point B est $(a - b.\sin\beta)$ et que l'axe de rotation (O,Y0) est contenu dans le plan (O, A, B).

On en déduit que ce vecteur accélération est analogue à $\overrightarrow{\Gamma(A,1/0)}$, il suffit de remplacer le rayon de rotation (a) par (a-b.sinβ) , on obtient directement :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = -(a - b.\sin\beta)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - (a - b.\sin\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1}}$$

Question B-3 : En déduire $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$ *.*

Il suffit d'appliquer la formule de composition des accélérations :

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = \overrightarrow{\Gamma(B,2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} + 2\times\overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \overrightarrow{V(B,2/1)}$$

Avec :

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/1)} = -b\ddot{\beta}.\overrightarrow{X2} - b\dot{\beta}^2.\overrightarrow{Y2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(B,1/0)} = -(a - b.\sin\beta)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - (a - b.\sin\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1}$$

$$2\times\overrightarrow{\Omega 1/0} \wedge \overrightarrow{V(B,2/1)} = 2\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} \wedge (-b\dot{\beta}).\overrightarrow{X2} = 2b\dot{\alpha}\dot{\beta}.\sin(\pi/2 - \beta).\overrightarrow{Z1}$$

On obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = -b\ddot{\beta}.\overrightarrow{X2} - b\dot{\beta}^2.\overrightarrow{Y2} - (a - b.\sin\beta)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - (a - b.\sin\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1} + 2b.\dot{\alpha}\dot{\beta}.\cos\beta.\overrightarrow{Z1}}$$

Question B-4 : Donner une méthode de calcul pour $\overrightarrow{\Gamma(C,3/0)}$*.*

Il est évidemment possible de calculer la vitesse et de la dériver. Cette méthode n'est pas forcément la plus longue mais la méthode la plus rapide est d'utiliser une relation de composition des accélérations :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(C,3/0)} = \overrightarrow{\Gamma(C,3/2)} + \overrightarrow{\Gamma(C,2/0)} + 2\times\overrightarrow{\Omega 2/0} \wedge \overrightarrow{V(C,3/2)}}$$

Cette méthode est judicieuse si on remarque qu'il est simple d'obtenir $\overrightarrow{\Gamma(C,2/0)}$ en remplaçant (b) par (b+λ) dans $\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)}$:

$$\overrightarrow{\Gamma(B,2/0)} = -(b+\lambda)\ddot{\beta}.\overrightarrow{X2} - (b+\lambda)\dot{\beta}^2.\overrightarrow{Y2} - (a-(b+\lambda).\sin\beta)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - (a-(b+\lambda).\sin\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1} + 2(b+\lambda).\dot{\alpha}\dot{\beta}.\cos\beta.\overrightarrow{Z1}$$

Les deux autres termes se calculent sans difficulté :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\Gamma(C,3/2)} = \ddot{\lambda}.\overrightarrow{Y2} \\ 2\times\overrightarrow{\Omega 2/0} \wedge \overrightarrow{V(C,3/2)} = 2\left(\dot{\alpha}.\overrightarrow{Y0} + \dot{\beta}.\overrightarrow{Z1}\right) \wedge \dot{\lambda}.\overrightarrow{Y2} = 2\dot{\alpha}\dot{\lambda}.\sin\beta.\overrightarrow{Z1} - 2\dot{\beta}\dot{\lambda}.\overrightarrow{X2} \end{cases}$$

On en déduit :

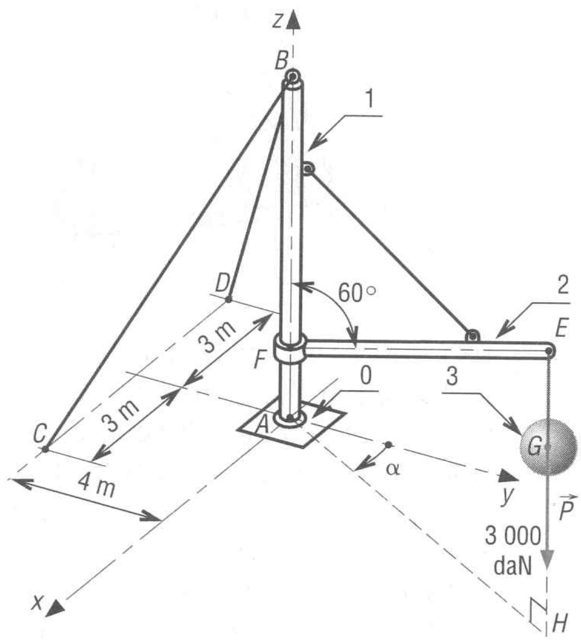
$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(C,3/0)} = \left| \begin{array}{c} -(a-(b+\lambda).\sin\beta)\ddot{\alpha}\overrightarrow{Z1} - (a-(b+\lambda).\sin\beta)\dot{\alpha}^2\overrightarrow{X1} \\ -(b+\lambda)\ddot{\beta}.\overrightarrow{X2} - (b+\lambda)\dot{\beta}^2.\overrightarrow{Y2} \\ \ddot{\lambda}.\overrightarrow{Y2} \\ +2(b+\lambda).\dot{\alpha}\dot{\beta}.\cos\beta.\overrightarrow{Z1} + 2\dot{\alpha}\dot{\lambda}.\sin\beta.\overrightarrow{Z1} - 2\dot{\beta}\dot{\lambda}.\overrightarrow{X2} \end{array} \right.}$$

Partie C : « Mât de charge »

1. Présentation du mécanisme

Un mât de charge, utilisé pour décharger les navires, se compose d'un mât principal vertical 1 (*AB*), lié en *A* (liaison rotule) au pont 0 du bateau et maintenu en B par deux câbles 5 (*BC*) et 6 (*BD*).
La charge à lever 3 (P = 3 000 daN) est fixée en *E* sur un deuxième mât 2 (*EF*) pouvant tourner (pivot d'axe *F, z*) autour de *AB*. Un angle de 60° est maintenu entre les deux mats à l'aide du câble 4.

Les poids des mâts et des câbles sont négligés.
Les dimensions du système sont les suivantes :
AB = EF = L = 6m ; AF = EG = h = 2m
$\overrightarrow{AC} = a.\vec{x} - b.\vec{y}$; $\overrightarrow{AD} = -a.\vec{x} - b.\vec{y}$ avec a = 3m et b = 4m



2. Travail demandé

Question C-1 : En isolant le câble 5, déterminer les relations permettant de traduire la direction des efforts au point C.

On isole le câble 5, ce solide est en équilibre sous 2 glisseurs. Ces deux forces sont donc directement opposées :
$\overrightarrow{R_{05}} = -\overrightarrow{R_{15}}$ et $\overrightarrow{R_{05}} // \overrightarrow{BC}$

On en déduit directement : $\dfrac{X05}{-a} = \dfrac{Y05}{b} = \dfrac{Z05}{L} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} b.X05 = -a.Y05 & \langle éq.1 \rangle \\ L.X05 = -a.Z05 & \langle éq.2 \rangle \\ b.Z05 = L.Y05 & \langle éq.3 \rangle \end{cases}}$

Question C-2 : Appliquer la même méthode pour déterminer la direction des efforts au point D.

On isole le câble 6, ce solide est en équilibre sous 2 glisseurs. Ces deux forces sont donc directement opposées :
$\overrightarrow{R_{06}} = -\overrightarrow{R_{16}}$ et $\overrightarrow{R_{06}} // \overrightarrow{BD}$

On en déduit directement : $\dfrac{X06}{a} = \dfrac{Y06}{b} = \dfrac{Z06}{L} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} b.X06 = a.Y06 & \langle éq.4 \rangle \\ L.X06 = a.Z06 & \langle éq.5 \rangle \\ b.Z06 = L.Y06 & \langle éq.6 \rangle \end{cases}}$

Question C-3 : Isoler l'ensemble de ce mât (1+2+3+4+5+6) et appliquer le PFS au point A pour déterminer la tension dans les câbles en fonction de l'angle α.

On isole l'ensemble (1+2+3+4+5), cet ensemble est en équilibre sous l'action de 4 actions mécaniques extérieures :

$$\{T_{0\to5}\} = {}_C\begin{Bmatrix} X05 & 0 \\ Y05 & 0 \\ Z05 & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X05 & -bZ05 \\ Y05 & -aZ05 \\ Z05 & aY05+bX05 \end{Bmatrix} \quad \text{car } \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{R_{05}} = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X05 \\ Y05 \\ Z05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bZ05 \\ -aZ05 \\ aY05+bX05 \end{pmatrix}$$

$$\{T_{0\to6}\} = {}_D\begin{Bmatrix} X06 & 0 \\ Y06 & 0 \\ Z06 & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X06 & -bZ06 \\ Y06 & aZ06 \\ Z06 & -aY06+bX06 \end{Bmatrix} \quad \text{car } \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{R_{06}} = \begin{pmatrix} -a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X06 \\ Y06 \\ Z06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bZ06 \\ aZ06 \\ -aY06+bX06 \end{pmatrix}$$

$$\{T_{0\to1}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X01 & 0 \\ Y01 & 0 \\ Z01 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T_{g\to3}\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & -L.\sin 60\cos\alpha.P \\ 0 & -L.\sin 60\sin\alpha.P \\ -P & 0 \end{Bmatrix} \quad \text{car } \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} -L.\sin 60\sin\alpha \\ -L.\sin 60\cos\alpha \\ ? \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L.\sin 60\cos\alpha P \\ -L.\sin 60\sin\alpha P \\ 0 \end{pmatrix}$$

En appliquant le PFS au point A, on obtient :

$$\begin{cases} X05+X06+X01=0 & \langle éq.7\rangle \\ Y05+Y06+Y01=0 & \langle éq.8\rangle \\ Z05+Z06+Z01-P=0 & \langle éq.9\rangle \\ -bZ05-bZ06-L.\sin 60\cos\alpha.P=0 & \langle éq.10\rangle \\ -aZ05+aZ06-L.\sin 60\sin\alpha.P=0 & \langle éq.11\rangle \\ aY05+bX05-aY06+bX06=0 & \langle éq.12\rangle \end{cases}$$

Résolution :

$$\langle éq.11\rangle \Rightarrow Z05 = Z06 - \frac{L.\sin 60\sin\alpha}{a}P$$

En substituant dans $\langle éq.10\rangle \Rightarrow -b\left(Z06 - \dfrac{L.\sin 60\sin\alpha}{a}P\right) - bZ06 - L.\sin 60\sin\alpha.P = 0$

$$\Rightarrow -2bZ06 + L.\sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{b-a}{a}\right) = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow Z06 = +L.\sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{b-a}{2ab}\right)}$$

$$\boxed{\Rightarrow Z05 = +L.\sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{-b-a}{2ab}\right)}$$

$$\langle éq.2\rangle \Rightarrow X05 = \frac{-a}{L}Z05 \qquad \boxed{\Rightarrow X05 = \sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{b+a}{2b}\right)}$$

$$\langle éq.3\rangle \Rightarrow Y05 = \frac{b}{L}Z05 \qquad \boxed{\Rightarrow Y05 = -\sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{b+a}{2a}\right)}$$

$$\langle éq.5\rangle \Rightarrow X06 = \frac{a}{L}Z06 \qquad \boxed{\Rightarrow X06 = \sin 60\sin\alpha.P\left(\frac{b-a}{2b}\right)}$$

$\langle éq.6 \rangle \Rightarrow Y06 = \dfrac{b}{L} Z06 \qquad \boxed{\Rightarrow Y06 = \sin 60 \sin \alpha . P\left(\dfrac{b-a}{2a}\right)}$

Les composantes de l'action mécanique de 0→1 ne sont pas nécessaires, on aurait pu les obtenir avec les trois équations non utilisées :

$\langle éq.9 \rangle \Rightarrow Z01 = P\left(\dfrac{2ab + L.\sin 60 \sin \alpha (b-a-b-a)}{2ab}\right) = P\left(\dfrac{2ab + L.\sin 60 \sin \alpha (-2a)}{2ab}\right)$

$\boxed{\Rightarrow Z01 = P\left(\dfrac{b - L.\sin 60 \sin \alpha}{b}\right)}$

$\langle éq.7 \rangle \Rightarrow X01 = -X05 - X06 \qquad \boxed{\Rightarrow X01 = -\sin 60 \sin \alpha . P}$

$\langle éq.8 \rangle \Rightarrow Y01 = -Y05 - Y06 \qquad \boxed{\Rightarrow Y01 = \sin 60 \sin \alpha . P}$

A partir des différentes composantes il est assez simple de calculer les tensions dans les câbles 5 et 6 :

$\boxed{T6 = \left\|\overrightarrow{R_{06}}\right\| = \sqrt{XO6^2 + YO6^2 + Z06^2} = \sin 60 \sin \alpha . P\sqrt{\left(\dfrac{b-a}{2b}\right)^2 + \left(\dfrac{b-a}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{L(b-a)}{2ab}\right)^2}}$