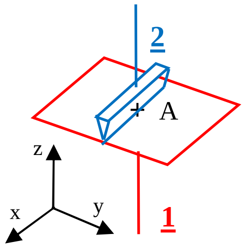
DS6-2015_CORRIGE

Partie A « Questions de cours sur les torseurs »

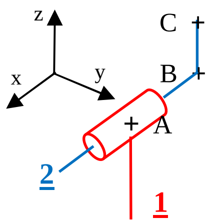
Pour cette partie, on respectera les notations suivantes pour les torseurs : $\{V_{i/j}\}=\begin{Bmatrix}\alpha ij & uij\\ \beta ij & vij\\ \gamma ij & wij\end{Bmatrix}$; $\{T_{i\to j}\}=\begin{Bmatrix}Xij & Lij\\ Yij & Mij\\ Zij & Nij\end{Bmatrix}$

Question A-1 : Donner la forme des torseurs cinématique et statique au point A (nom et position des composantes non nulles) de la liaison appui linéaire rectiligne ci-contre :



$$\boxed{\{V_{1/2}\}=\begin{Bmatrix}\alpha 12 & u12\\ 0 & v12\\ \gamma 12 & 0\end{Bmatrix}_A} \qquad \boxed{\{T_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ 0 & M12\\ Z12 & 0\end{Bmatrix}_A}$$

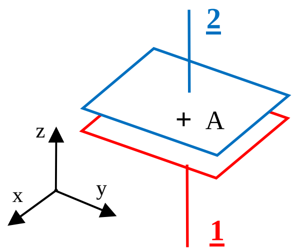
Question A-2 : Le torseur statique de la liaison pivot glissant (ci-contre) étant donné au point A, déplacer ce torseur aux points B et C.



$\{T_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y21 & M21\\ Z21 & N21\end{Bmatrix}_A$ avec $\overrightarrow{AB}=-b.\vec{x}$; $\overrightarrow{BC}=c.\vec{z}$

$$\boxed{\{T_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y21 & M21-b.Z21\\ Z21 & N21+b.Y21\end{Bmatrix}_B=\begin{Bmatrix}0 & c.Y21\\ Y21 & M21-b.Z21\\ Z21 & N21+b.Y21\end{Bmatrix}_C}$$

Question A-3 : Le torseur statique de la liaison appui plan (ci-contre) étant donné au point A, déterminer les autres points de l'espace auxquels le torseur conserve la même forme. $\{T_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix}0 & L21\\ 0 & M21\\ Z21 & 0\end{Bmatrix}_A$



Quelque soit le déplacement $\overrightarrow{MA}$, on aura $\{T_{2\to 1}\}=\begin{Bmatrix}0 & L21+Z21(...)\\ 0 & M21+Z21(...)\\ Z21 & 0\end{Bmatrix}_M$

Car $\overrightarrow{M^t21_M}=\overrightarrow{M^t21_A}+\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{R21}=\begin{pmatrix}N21\\ M21\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ Z21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N21+y.Z21\\ M21-x.Z21\\ 0\end{pmatrix}$

En conclusion, on peut distinguer deux cas :

- Pour tous les points de la normale (A,Z), le torseur reste identique,
- Pour tous les autres points de l'espace, le torseur conserve la même forme.

La puissance mécanique d'un moteur est fréquemment transmise à un récepteur par un accouplement homocinétique. Le plus souvent, ce composant permet de transmettre un torseur d'action mécanique ayant la forme suivante :

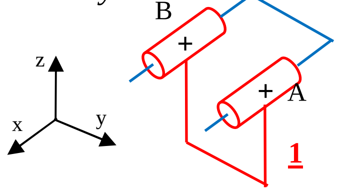
$$\{T_{mot\rightarrow recept}\} = \left\{\begin{matrix} 0 & Lmr \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_P$$

Question A-4 : En faisant des hypothèses sur la position d'un point M par rapport à P, quelle forme peut prendre ce torseur en ce point M.

Quelque soit le déplacement de ce torseur, il reste identique en tout point de l'espace.

Partie B : « Hyperstatisme des guidages »

$\overrightarrow{AB} = -b.\vec{y}$



Les mécanismes ont fréquemment recours à des guidages en rotation ou en translation. Ces guidages sont réalisés en associant plusieurs liaisons. Ce sont des sources d'hyperstatisme des mécanismes. Nous allons qualifier deux guidages classiques.

Question B-1 : A partir d'un calcul sur les torseurs, déterminer la liaison équivalente aux 2 liaisons du montage ci-contre. En déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

Les deux liaisons sont en parallèle, on ajoute les torseurs statiques :

$$\{T1\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y1 & M1 \\ Z1 & N1 \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} 0 & b.Z1 \\ Y1 & M1 \\ Z1 & N1 \end{matrix}\right\}_B$$

$$\{T2\} = \left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y2 & M2 \\ Z2 & N2 \end{matrix}\right\}_B$$

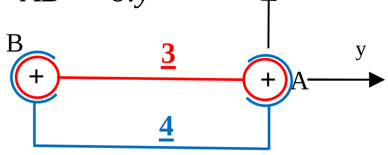
$$\boxed{\Rightarrow \{Teq\} = \{T1\} + \{T2\} = \left\{\begin{matrix} 0 & b.Z1 \\ Y1+Y2 & M1+M2 \\ Z1+Z2 & N1+N2 \end{matrix}\right\}_B}$$

On en déduit :

- Liaison équivalente est une Glissière d'axe //X
- Le degré de mobilité : m = 1
- Le degré d'hyperstatisme : h = Ns-rs = 8 – 5 = 3

Question B-2 : A partir d'un calcul sur les torseurs, déterminer la liaison équivalente aux 2 liaisons du montage ci-contre. En déduire le degré de mobilité et d'hyperstatisme.

$\overrightarrow{AB} = -b.\vec{y}$



Les deux liaisons sont en parallèle, on ajoute les torseurs statiques :

$$\{T1\} = \left\{\begin{matrix} X1 & 0 \\ Y1 & 0 \\ Z1 & 0 \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} X1 & b.Z1 \\ Y1 & 0 \\ Z1 & -b.X1 \end{matrix}\right\}_B$$

$$\{T2\} = \left\{\begin{matrix} X2 & 0 \\ Y2 & 0 \\ Z2 & 0 \end{matrix}\right\}_B$$

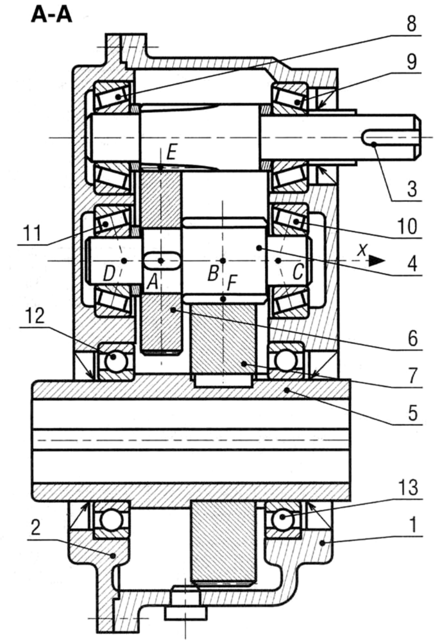
$$\boxed{\Rightarrow \{Teq\} = \{T1\} + \{T2\} = \left\{\begin{matrix} X1+X2 & b.Z1 \\ Y1+Y2 & 0 \\ Z1+Z2 & -b.X1 \end{matrix}\right\}_B}$$

On en déduit :

- Liaison équivalente est un Pivot d'axe (A,Y)
- Le degré de mobilité : m = 1
- Le degré d'hyperstatisme : h = Ns-rs = 6 – 5 = 1

Partie C : « Réducteur à deux trains fixes »

1. Présentation du mécanisme



Le réducteur de la figure ci-contre est constitué de 3 arbres réalisant 2 étages de réduction. La coupe A-A est une coupe brisée à plans perpendiculaires. Les roues dentées sont à denture droite avec un angle de pression de 20°.
On souhaite calculer les efforts supportés par les roulements 10 et 11. On considérera que les modèles de liaison associés à ces roulements sont des rotules.
L'arbre intermédiaire (4+6) est soumis à 4 actions mécaniques extérieures : 2 actions au niveau des roulements, un effort de 3 sur 6 au point E et un effort de 7 sur 4 au point F. Seule la norme de l'effort E est connue : 300 daN.
Le poids des différentes pièces est négligé.

Les dimensions du système sont les suivantes :
DA = a = 34 mm ; AB = b = 56 mm ; BC = c = 40 mm
AE = R = 80 mm ; BF = r = 30 m

2. Travail demandé

Question C-1 : Calculer l'effort F ainsi que les différentes composantes des torseurs d'action mécanique des deux roulements en fonction de E et des dimensions a, b, c, R, r.

On isole 4+6, cet ensemble est en équilibre sous 4 actions mécaniques extérieures :

$$\{T10\rightarrow 4\}=\left\{\begin{matrix} X104 & 0\\ Y104 & 0\\ Z104 & 0\end{matrix}\right\}_D$$

$$\{T11\rightarrow 4\}=\left\{\begin{matrix} X114 & 0\\ Y114 & 0\\ Z114 & 0\end{matrix}\right\}_C=\left\{\begin{matrix} X114 & 0\\ Y114 & -(a+b+c).Z114\\ Z114 & (a+b+c).Y114\end{matrix}\right\}_D \quad \text{car } \overrightarrow{DC}\wedge \overrightarrow{R114}=\begin{pmatrix} a+b+c\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} X114\\ Y114\\ Z114\end{pmatrix}$$

$$\{T3\rightarrow 6\}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0\\ E.\sin 20 & 0\\ E.\cos 20 & 0\end{matrix}\right\}_E=\left\{\begin{matrix} 0 & -RE.\cos 20\\ E.\sin 20 & -aE.\cos 20\\ E.\cos 20 & aE.\sin 20\end{matrix}\right\}_D \quad \text{car } \overrightarrow{DB}\wedge \vec{E}=\begin{pmatrix} a\\ -R\\ 0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0\\ E.\sin 20\\ E.\cos 20\end{pmatrix}$$

$$\{T7\rightarrow 4\}=\left\{\begin{matrix} 0 & 0\\ -F.\cos 20 & 0\\ -F.\sin 20 & 0\end{matrix}\right\}_F=\left\{\begin{matrix} 0 & rF.\cos 20\\ -F.\cos 20 & (a+b)F.\sin 20\\ -F.\sin 20 & -(a+b)F.\cos 20\end{matrix}\right\}_D \quad \text{car } \overrightarrow{DF}\wedge \vec{F}=\begin{pmatrix} a+b\\ 0\\ r\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 0\\ -F.\cos 20\\ -F.\sin 20\end{pmatrix}$$

On applique le PFS au point D :

$$\left\{\begin{array}{ll} X104+X114=0 & \langle éq.1\rangle\\ Y104+Y114+E.\sin 20-F.\cos 20=0 & \langle éq.2\rangle\\ Z104+Z114+E.\cos 20-F.\sin 20=0 & \langle éq.3\rangle\\ -RE.\cos 20+rF.\cos 20=0 & \langle éq.4\rangle\\ -(a+b+c).Z114-aE.\cos 20+(a+b)F.\sin 20=0 & \langle éq.5\rangle\\ (a+b+c).Y114+aE.\sin 20-(a+b)F.\cos 20=0 & \langle éq.6\rangle \end{array}\right.$$

Résolution :

$$\langle éq.4\rangle \Rightarrow \boxed{F=\frac{R}{r}E}$$

$$\langle éq.5\rangle \Rightarrow \boxed{Z114 = \frac{E}{a+b+c}\left[-a.\cos 20 + (a+b)\frac{R}{r}\sin 20\right]}$$

$$\langle éq.6\rangle \Rightarrow \boxed{Y114 = \frac{E}{a+b+c}\left[-a.\sin 20 + (a+b)\frac{R}{r}\cos 20\right]}$$

$$\langle éq.2\rangle \Rightarrow \quad Y104 = -Y114 - E.\sin 20 + F.\cos 20$$

$$\boxed{Y104 = \frac{E}{a+b+c}\left[\frac{R}{r}\cos 20.(2a+2b+c) - \sin 20.(2a+b+c)\right]}$$

$$\langle éq.3\rangle \Rightarrow \quad Z104 = -Z114 - E.\cos 20 + F.\sin 20$$

$$\boxed{Z104 = \frac{E}{a+b+c}\left[\cos 20.(-b-c) + \frac{R}{r}\sin 20.(c)\right]}$$

En revanche, $\langle éq.1\rangle$ ne permet pas de déterminer X104 et X114.

Question C-2 : Effectuer l'application numérique. Pour quelle raison ne peut-on pas déterminer les composantes de résultante des roulements suivant l'axe X ?

Applications numériques :
F = 800 daN ; Z114 ≈ 115,7 daN ; Y114 ≈ 493,6 daN ; Y104 ≈ 155,5 daN ; Z104 ≈ -123,9 daN

Il est normal de ne pas pouvoir déterminer X104 et X114. En effet, le modèle de liaison choisit pour ces deux roulements conduit à un montage hyperstatique. Mise en parallèle de 2 rotules (h = 1) calculé à la question B-2.