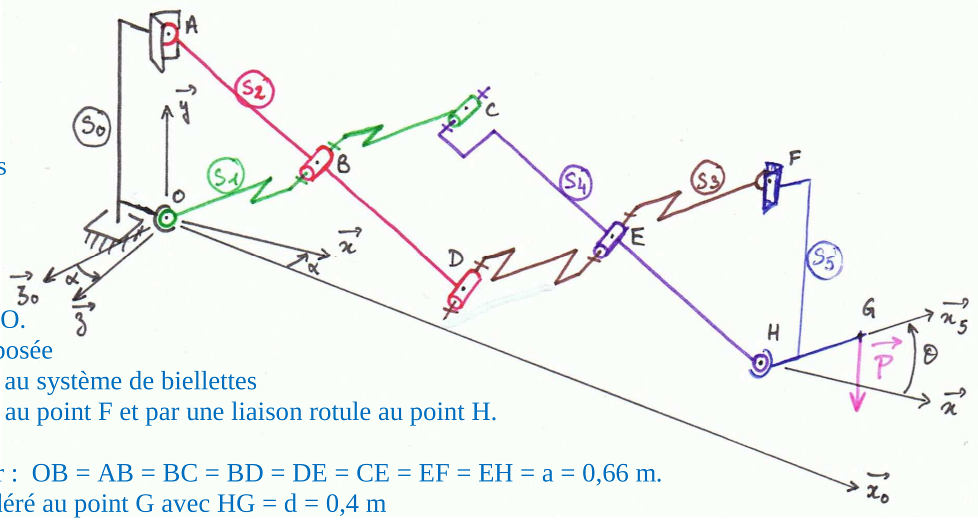
DM3-2015_CORRIGE

« Potence extensible »

1. Présentation du système

A l'image des tables élévatrices, crics mécaniques, tire-bouchons, pince à riveter et support de miroir de salle de bain qui utilisent une cinématique « en losange », on envisage de concevoir une potence extensible dont le schéma cinématique est donné ci-dessous. Ce système est destiné à faciliter le déplacement horizontal de pièces ou d'outils lourds.



Cette potence est constituée :

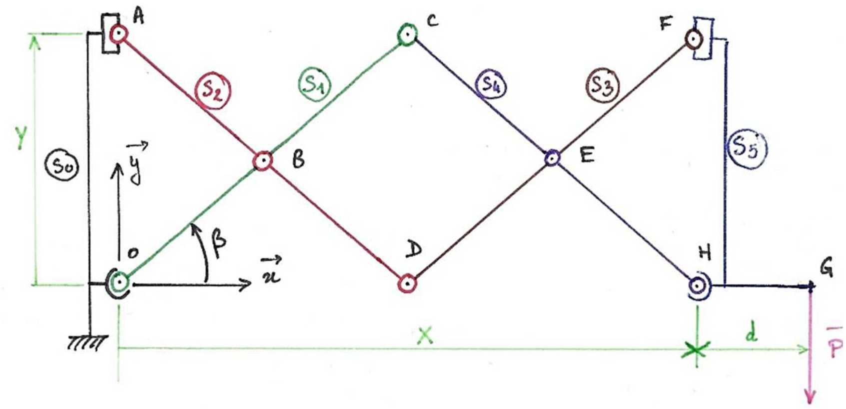
- d'un axe principal S0 fixé au sol,
- d'un système de 4 biellettes « en losange » S1, S2, S3 et S4 reliées entre-elles par des liaisons pivots aux points B, C, D et E. Cet ensemble est articulé à l'axe principal S0 par une liaison linéaire annulaire au point A et par une liaison rotule au point O.
- D'un support S5 sur lequel sera posée l'objet à déplacer. S5 est articulé au système de biellettes par une liaison linéaire annulaire au point F et par une liaison rotule au point H.

Les biellettes ont toutes la même longueur : OB = AB = BC = BD = DE = CE = EF = EH = a = 0,66 m.
Le poids P de l'objet à déplacer est considéré au point G avec HG = d = 0,4 m
On définit trois repères différents :

- R0 (O, x0, y, z0) lié au sol
- R1 (O, x, y, z) lié au système des 4 biellettes
- R5 (H, x5, y, z5) lié au support

Par ailleurs, on note X et Y les deux distances variables suivantes :
X = OH et Y = OA

2. Travail demandé



1. Etablir les relations : X = f(β) ; Y = f(β) et Y = f(X)

Il est très simple d'exprimer le vecteur :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DH} = 4(\overrightarrow{OB}.\vec{x})\vec{x} = 4a.\cos\beta.\vec{x}$$

$$\boxed{x(t) = 4a.\cos\beta}$$

Ou le vecteur :

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = 2(\overrightarrow{OB}.\vec{y})\vec{y} = 2a.\sin\beta.\vec{y}$$

$$\boxed{y(t) = 2a.\sin\beta}$$

Sachant que $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$, on en déduit : $\left(\frac{y(t)}{2a}\right)^2 + \left(\frac{x(t)}{4a}\right)^2 = 1$

$$\boxed{\Rightarrow 4y(t)^2 + x(t)^2 = 16a^2}$$

(équation paramétrique d'une ellipse de centre O, de grand axe 4a suivant x et de petit axe 2a suivant y)

Ou alors : $\boxed{y(t) = \sqrt{\frac{16a^2 - x(t)^2}{4}}}$

2. Par construction, l'amplitude de mouvement est limitée : 0,25.a<Y<1,5.a. Quelle sera l'amplitude pour X ?

En reprenant la relation précédente, on peut en déduire : $x(t)=\sqrt{16a^2-4y(t)^2}=2\sqrt{4a^2-y(t)^2}$

Connaissant l'amplitude de mouvement de y, on en déduit : $2\sqrt{4a^2-\left(\dfrac{a}{4}\right)^2}>x(t)>2\sqrt{4a^2-\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2}$

Remarque : mécaniquement, il est évident que la fonction « x=f(y) » est décroissante. Ymini correspond à xmaxi et vice versa … il faut donc inverser l'ordre des limites d'amplitude entre y et x.

$\Rightarrow 2\sqrt{\dfrac{63a^2}{16}}>x(t)>2\sqrt{\dfrac{7a^2}{4}}$ $\boxed{\Rightarrow \dfrac{1}{2}\sqrt{63}\cdot a>x(t)>\sqrt{7}\cdot a}$ $\boxed{\Rightarrow 2{,}619>x(t)>1{,}746}$

Connaissant l'amplitude de mouvement de y, on peut en déduire l'amplitude d'angle car $\beta<\arcsin\left(\dfrac{y(t)}{a}\right)$:

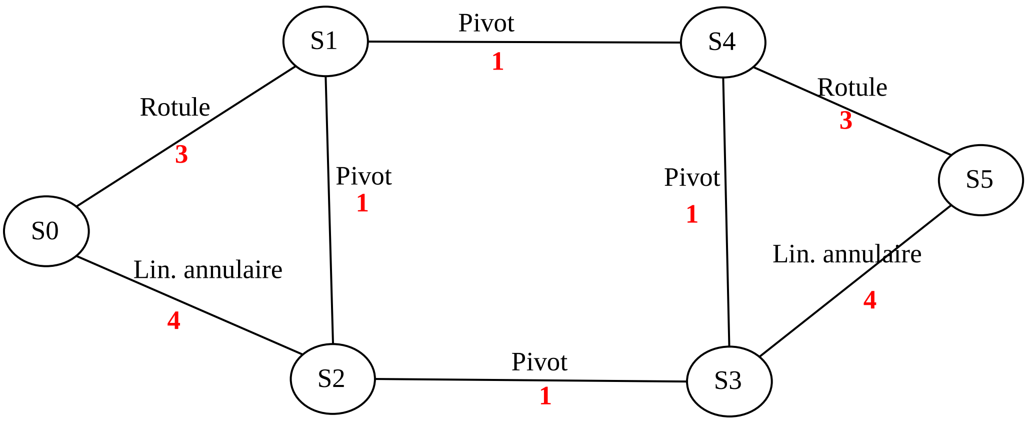
$\dfrac{a}{4}<y(t)<\dfrac{3a}{2}$ $\Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{a}{8a}\right)<\beta<\arcsin\left(\dfrac{3a}{4a}\right)$

$\Rightarrow \arcsin\left(\dfrac{1}{8}\right)<\beta<\arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right)$ $\boxed{\Rightarrow 7{,}18°<\beta<48{,}59°}$

On peut en déduire l'amplitude pour x(t) car $x(t)=4a.\cos\beta$:

$\Rightarrow 4a.\cos(7{,}18°)>x(t)>4a.\cos(48{,}59°)$ $\boxed{\Rightarrow 1{,}746<x(t)<2{,}619\ m}$

3. À partir du graphe de structure de ce système, déterminer les degrés de mobilité et d'hyperstatisme de ce mécanisme.



Nc = 18

γ = 3

On peut distinguer 3 mobilités indépendantes : **m = 3**
- la rotation d'axe y de l'ensemble (S1+S2+S3+S4)/S0
- la rotation d'axe y de S5/(S1+S2+S3+S4)
- le déploiement des ciseaux, c'est à dire la rotation suivant z de S1/S2

On peut en déduire le degré d'hyperstatisme : h = m + 6γ - Nc = 3 +18 – 18 **h = 3**

4. Proposer une nouvelle cinématique permettant de le rendre isostatique tout en conservant les mêmes mobilités pour le support S5.

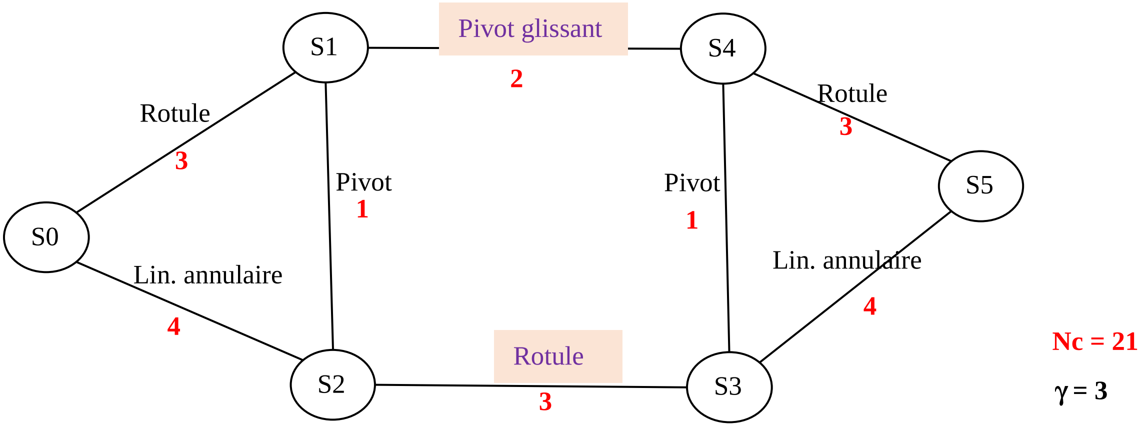
Analyse du problème :

L'hyperstatisme de ce mécanisme ne provient que de la mise en boucle des 4 liaisons pivot des ciseaux (la boucle cinématique constituée des solides S1, S2, S3 et S4). Le degré d'hyperstatisme traduit l'impossibilité d'avoir les 4 axes des liaisons pivot parallèles (problème de parallélisme coplanaire et non coplanaire : h=2) et l'impossibilité d'avoir un calage axial identique sur les 4 liaisons pivot (h=1).

Degrés de liberté à ajouter :

Il est donc nécessaire d'introduire deux degrés de liberté en rotation supplémentaires dans l'une des liaisons pivot. C'est-à-dire de la remplacer par une rotule. Il faut également donner un degré de liberté en translation dans une autre liaison pivot. C'est-à-dire remplacer une liaison pivot par un pivot glissant. Mais si on souhaite conserver la structure plane des 2 ciseaux, il est impératif de conserver un guidage en rotation (pivot ou pivot glissant) au point C ou au point D.

Proposition de solution :



Dans cette proposition de solution, les mobilités ne sont pas modifiées : m = 1

h = m + 6γ - Nc = 3 +18 – 21 **h = 0**

5. En considérant le mécanisme dans la position particulière du schéma cinématique plan ci-dessus (β = 40° et θ = 0), déterminer les efforts en F et H en isolant le support S5. Le poids propre des différentes pièces peut être négligé par rapport au poids de l'objet à déplacer : P = 200 daN.

On isole le support S5. Il est en équilibre sous 3 actions mécaniques extérieures. Etant donné que le système est plan, les inconnues Zi, Li et Mi des différents torseurs seront toujours nulles :

$$\{Tg \to S5\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_H\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -dP \end{Bmatrix}$$

$$\{TS3 \to S5\} = {}_F\begin{Bmatrix} X35 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_F\begin{Bmatrix} X35 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Y.X35 \end{Bmatrix}$$

$$\{TS4 \to S5\} = {}_H\begin{Bmatrix} X45 & 0 \\ Y45 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En appliquant le PFS au point H, on obtient 3 équations :

$$\begin{cases} X35 + X45 = 0 & \langle éq.1 \rangle \\ -P + Y45 = 0 & \langle éq.2 \rangle \\ -dP - Y.X35 = 0 & \langle éq.3 \rangle \end{cases}$$

Résolution :

$$\boxed{\langle éq.3 \rangle \Rightarrow X35 = \frac{-d}{Y}P} \quad \boxed{\langle éq.2 \rangle \Rightarrow Y45 = P} \quad \boxed{\langle éq.1 \rangle \Rightarrow X45 = \frac{d}{Y}P}$$

Application numérique :

Si $\beta = 40°$, alors $Y = 2a.\sin\beta = 2\times 0{,}66\times\sin 40° = 0{,}848\ m$

$\boxed{X35 = \frac{-0{,}4}{0{,}848}200 = -94{,}3\ daN}$ $\boxed{X45 = 94{,}3\ daN}$ $\boxed{Y45 = 200\ daN}$

On peut en déduire les normes des efforts :

$\boxed{\left\|\overrightarrow{R35}\right\| = 94{,}3\ daN}$ $\boxed{\left\|\overrightarrow{R45}\right\| = \sqrt{200^2 + 94{,}3^2} \approx 221\ daN}$

Remarque : étant donné que le système est plan, il aurait été possible de déterminer ces efforts par une méthode graphique.

6. Dans les mêmes conditions, déterminer les efforts en O et A.

De la même manière, on isole le support S1+S2+S3+S4+S5. Il est en équilibre sous 3 actions mécaniques extérieures. Etant donné que le système est plan, les inconnues Zi, Li et Mi des différents torseurs seront toujours nulles :

$$\{Tg \to S5\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_H\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -(d+X)P \end{Bmatrix}$$

$$\{TS0 \to S2\} = {}_A\begin{Bmatrix} X02 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} X02 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -Y.X02 \end{Bmatrix}$$

$$\{TS0 \to S1\} = {}_O\begin{Bmatrix} X01 & 0 \\ Y01 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En appliquant le PFS au point O, on obtient 3 équations :

$$\begin{cases} X01 + X02 = 0 & \langle éq.4\rangle \\ -P + Y01 = 0 & \langle éq.5\rangle \\ -(d+X)P - Y.X02 = 0 & \langle éq.6\rangle \end{cases}$$

Résolution :

$\boxed{\langle éq.6\rangle \Rightarrow X02 = \frac{-(d+X)}{Y}P}$ $\boxed{\langle éq.5\rangle \Rightarrow Y01 = P}$ $\boxed{\langle éq.4\rangle \Rightarrow X01 = \frac{d+X}{Y}P}$

Application numérique :

Si $\beta = 40°$, alors $Y = 2a.\sin\beta = 2\times 0{,}66\times\sin 40° = 0{,}848\ m$ et $X = 4a.\cos\beta = 4\times 0{,}66\times\cos 40° = 2{,}022\ m$

$\boxed{X02 = \frac{-2{,}822}{0{,}848}200 = -571\ daN}$ $\boxed{X01 = 571\ daN}$ $\boxed{Y01 = 200\ daN}$

On peut en déduire les normes des efforts :

$\boxed{\left\|\overrightarrow{R02}\right\| \approx 570\ daN}$ $\boxed{\left\|\overrightarrow{R01}\right\| = \sqrt{200^2 + 571^2} \approx 605\ daN}$

Remarque : étant donné que le système est plan, il aurait été possible de déterminer ces efforts par une méthode graphique.

7. Dans quelle position du système la norme de l'effort en O est-elle maximum ?

Mécaniquement, il est très simple de comprendre que l'effort en A est proportionnel au bras de levier X+d .
Par ailleurs la norme de l'effort en O varie dans le même sens que l'effort en A.
On peut donc conclure que l'effort en O sera maximum quand le support S5 sera le plus éloigné de l'axe principal S0.
X maxi → effort en O maxi

On peut répondre directement à cette question à partir de la relation de la question suivante.

8. Déterminer la relation permettant de traduire l'évolution de la norme de l'effort en O en fonction de X.

$$\left\|\overrightarrow{R01}\right\| = \sqrt{X01^2+Y01^2} = P\sqrt{\left(\frac{d+X}{Y}\right)^2+1}$$

En exprimant $Y^2 = \dfrac{16a^2 - X^2}{4}$, on obtient :

$$\left\|\overrightarrow{R01}\right\| = P\sqrt{\frac{d^2+2dX+X^2+Y^2}{Y^2}} = P\sqrt{\frac{4d^2+8dX+4X^2+16a^2-X^2}{16a^2-X^2}}$$

Finalement : $\boxed{\left\|\overrightarrow{R01}\right\| = P\sqrt{\dfrac{3X^2+8dX+(4d^2+16a^2)}{16a^2-X^2}}}$

Etant donné que 0<X<4a, quand X → 4a alors :
- le numérateur → maxi
- le dénominateur → 0

En conclusion, quand X → 4a $\Rightarrow \left\|\overrightarrow{R01}\right\| = \max$

9. Peut-on déterminer les efforts en C et D ? Si oui, expliquer votre méthode pour résoudre (système isolé, efforts connus, Nbre d'inconnues, Nbre d'équations), si non expliquer pourquoi.

La méthode la plus simple reste une méthode analytique dans laquelle il faut isoler deux sous-ensembles différents. Le problème ne peut se résoudre que si on le considère comme plan. Si l'angle $\theta \neq 0$, l'hyperstatisme du mécanisme nous empêche de résoudre.

1ère étape : on isole S3+S4+S5, on connait P, on en déduit X14 et X23
Mais il reste 2 inconnues Y14 et Y23 et 1 seule équation !

2ème étape : on isole S3, on connait X23 et R53, on en déduit Y23

Résolution complète (non demandée) :

On isole S3+S4+S5. Cet ensemble est en équilibre sous 3 actions mécaniques extérieures :

$$\{Tg \rightarrow S5\} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_D\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -P & 0 \\ 0 & -\left(d+\frac{X}{2}\right)P \end{Bmatrix}$$

$$\{TS1 \rightarrow S4\} = {}_C\begin{Bmatrix} X14 & 0 \\ Y14 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_D\begin{Bmatrix} X14 & 0 \\ Y14 & 0 \\ 0 & -Y.X14 \end{Bmatrix}$$

$$\{TS2 \rightarrow S3\} = {}_D\begin{Bmatrix} X23 & 0 \\ Y23 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

En appliquant le PFS au point D, on obtient 3 équations : $\begin{cases} X14+X23=0 & \langle éq.7\rangle \\ -P+Y14+Y23=0 & \langle éq.8\rangle \\ -\left(d+\dfrac{X}{2}\right)P-Y.X14=0 & \langle éq.9\rangle \end{cases}$

Résolution :

$\boxed{\langle éq.9\rangle \Rightarrow X14=\dfrac{-(2d+X)}{2Y}P}$ $\boxed{\langle éq.7\rangle \Rightarrow X23=\dfrac{2d+X}{2Y}P}$

En revanche $\langle éq.5\rangle$ ne permet pas de déterminer Y14 et Y23. On ne connait que leur somme : $\boxed{Y14+Y23=P}$

On isole S3. Ce solide est en équilibre sous 3 actions mécaniques extérieures :

$$\{TS5\rightarrow S3\}=\left\{\begin{matrix} X53 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_F=\left\{\begin{matrix} X53 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -a.\sin\beta.X53 \end{matrix}\right\}_E$$

$$\{TS2\rightarrow S3\}=\left\{\begin{matrix} X23 & 0 \\ Y23 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_D=\left\{\begin{matrix} X23 & 0 \\ Y23 & 0 \\ 0 & -a.\cos\beta.Y23+a.\sin\beta.X23 \end{matrix}\right\}_E$$

$$\{TS4\rightarrow S3\}=\left\{\begin{matrix} X43 & 0 \\ Y43 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_E$$

En appliquant le PFS au point E, on obtient 3 équations :

$$\begin{cases} X53+X23+X43=0 & \langle éq.10\rangle \\ Y43+Y23=0 & \langle éq.11\rangle \\ -a.\sin\beta.X53-a.\cos\beta.Y23+a.\sin\beta.X23=0 & \langle éq.12\rangle \end{cases}$$

Résolution :

Or on sait que $\begin{cases} X23=\dfrac{2d+X}{2Y}P \\ X53=-X35=\dfrac{d}{Y}P \end{cases}$

$\langle éq.10\rangle \Rightarrow X43=\dfrac{2d+X}{2Y}P-\dfrac{d}{Y}P$ $\boxed{\Rightarrow X43=\dfrac{X}{2Y}P}$

$\langle éq.12\rangle \Rightarrow Y23=\dfrac{-a.\sin\beta(X23-X53)}{-a.\cos\beta}=\tan\beta.(X23-X53).P=\tan\beta.\left(\dfrac{2d+X}{2Y}-\dfrac{2d}{2Y}\right).P$

$\Rightarrow Y23=\tan\beta.\left(\dfrac{X}{2Y}\right).P$ avec $\left(\dfrac{X}{2Y}\right)=\dfrac{4a.\cos\beta}{4a.\sin\beta}=\dfrac{1}{\tan\beta}$

$\boxed{\Rightarrow Y23=P}$ $\boxed{\Rightarrow Y43=-P}$

En reprenant $\langle éq.5\rangle$, on obtient : $\boxed{Y14=P-Y23=0}$