

Quelques formules de trigonométrie pour la physique ...

1. Définition des fonctions trigonométriques :

Considérons un triangle rectangle en H. (H est le projeté orthogonal de M sur OA). Alors :

$$\sin \alpha = \frac{HM}{OM} = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}}$$

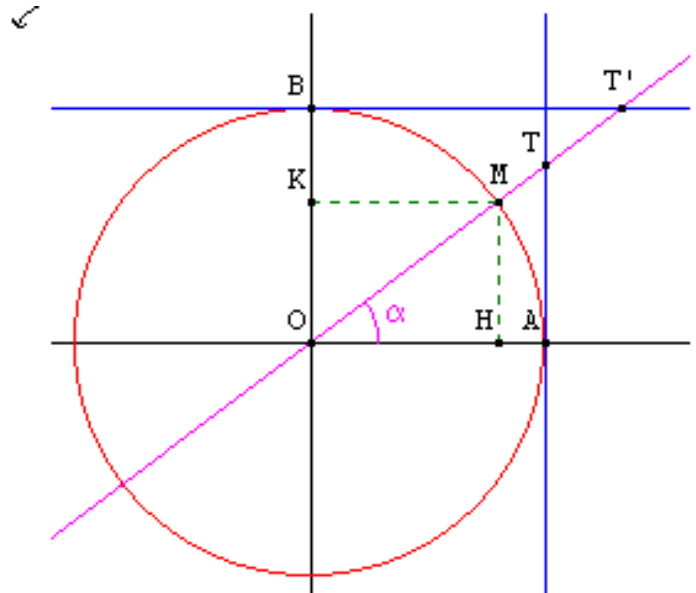
$$\cos \alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{HM}{OH} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}}$$

On peut en déduire les relations suivantes, utiles en mécanique :

$$OH = OM \cdot \cos \alpha$$

$$OK = HM = OM \cdot \sin \alpha$$



2. Valeurs remarquables.

Angles en radians	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
Angles en degrés	0	30	45	60	90
$\sin x$	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	Non défini

3. Propriétés des fonctions trigonométriques.

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \cos(\pi + x) = -\cos(x) = \cos(\pi - x) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x) = -\sin(\pi - x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x) \quad \tan(\pi + x) = \tan(x) = -\tan(\pi - x) \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

4. Formules de base :

Pour tout $x \in \mathfrak{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (Théorème de Pythagore dans le triangle OHM)

$$\text{Pour tout } x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[, \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)} \quad \text{Pour tout } x \in]0; \pi[, \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

5. Formules d'addition :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\text{Cas particuliers : } \sin(2a) = 2 \sin a \cos a \quad \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

6. Développement de produits :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

7. Formules de linéarisation :

$$\cos^2 a = \frac{1}{2} [1 + \cos(2a)]$$

$$\sin^2 a = \frac{1}{2} [1 - \cos(2a)]$$

8. Equations trigonométriques :

$$\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = -a + 2k\pi \end{cases} \quad \sin x = \sin a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases} \quad \tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

9. Trigonométrie et nombres complexes :

$$\exp(ix) = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\exp(-ix) = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

10. Cas des petits angles :

$$\text{Si } x \ll 1 \text{ rad alors } \cos x \approx 1 \quad \sin x \approx x \quad \tan x \approx x$$

Ces relations seront valables en physique pour des angles $< 20^\circ$

11. Fonctions réciproques :

$$\text{Pour tout } y \in [-1; 1] \text{ et } x \in [0; \pi], y = \cos(x) \Leftrightarrow x = \text{Arc cos}(y)$$

$$\text{Pour tout } y \in [-1; 1] \text{ et } x \in [-\pi/2; \pi/2], y = \sin(x) \Leftrightarrow x = \text{Arc sin}(y)$$

$$\text{Pour tout } y \in \mathfrak{R} \text{ et } x \in]-\pi/2; \pi/2[, y = \tan(x) \Leftrightarrow x = \text{Arc tan}(y)$$

12. Conversions :

$$\text{Degrés vers radians : } \theta(\text{rad}) = \theta(^{\circ}) \times \frac{\pi}{180}$$

$$\text{Radians vers degrés : } \theta(^{\circ}) = \theta(\text{rad}) \times \frac{180}{\pi}$$