Travaux dirigés de Mécanique n°4

Application directe du cours :

Exercice 1 : Rotor d'hélicoptère

Source : Wikipédia

Un hélicoptère Robinson R44 développe au décollage une puissance $P = 180\, cv$, ses pales tournant environ à $7\, tours.s^{-1}$.

1. Calculer la vitesse angulaire des pales.
2. Sachant que le diamètre du rotor est $d = 10{,}1\, m$, calculer la vitesse d'un point à l'extrémité de la pale.
3. Quel est le couple exercé par le moteur sur les pales au moment du décollage ?

Données : 1 cheval vapeur ($1cv$) vaut $736\, W$.

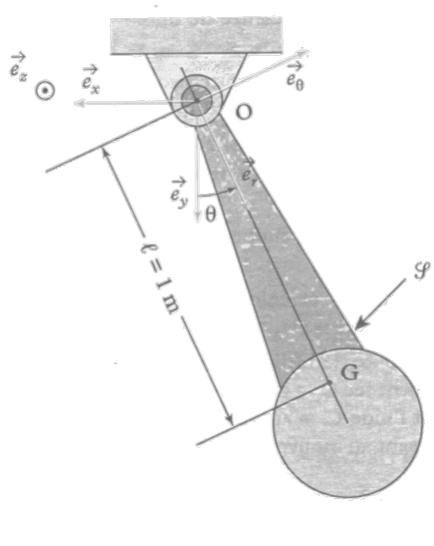
Exercice 2 : Energie cinétique terrestre

Dans le référentiel géocentrique, on assimile la Terre à une boule homogène de masse $M = 6.10^{24}\, kg$ et de rayon $R = 6380\, km$ tournant autour de l'axe des pôles avec une période $T = 86164\, s$.

En supposant que son moment d'inertie s'écrit $J = \frac{2}{5}mR^2$, déterminer l'énergie cinétique de rotation de la Terre dans le référentiel géocentrique.

Exemples classiques :

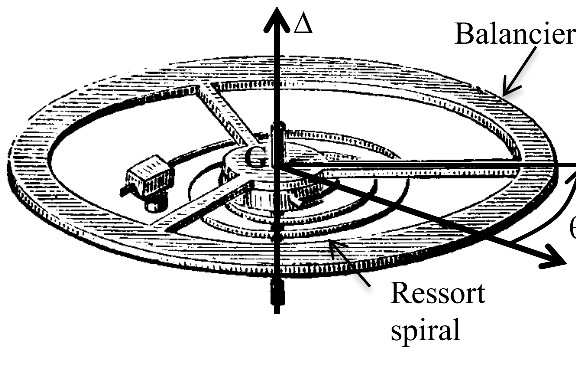
Exercice 3 : Balancier d'une horloge



Un balancier d'horloge est composé d'un solide S, de masse m, de centre de masse G et de moment d'inertie $J = kml^2$ par rapport à l'axe $\Delta = (O, \overrightarrow{e_z})$.
Il est mobile autour de l'axe Δ par l'intermédiaire d'une liaison pivot parfaite. L'axe Δ est fixe dans le référentiel galiléen terrestre.

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au balancier.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement du balancier.
3. Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.
4. Comment faut-il modifier *l* si l'horloge avance ? retarde ?

Exercice 4 : Pendule de torsion



En 1675, Christiaan Huygens invente le ressort spiral. Il constitue, avec le balancier, l'organe régulant des montres mécaniques.

Le balancier est constitué d'un disque évidé homogène de rayon $R = 5\, mm$ et de masse $m = 0{,}4\, g$. Il est libre de tourner autour d'un axe vertical Δ passant par son centre de gravité G (voir schéma).

Le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe Δ est $J = mR^2$. Le pivot est supposé parfait.

Un ressort spiral possède une extrémité soudée au balancier et l'autre est soudée à un point fixe.

La rotation du balancier est repérée par l'angle θ, choisi de telle sorte que le ressort est à vide pour $\theta = 0$.

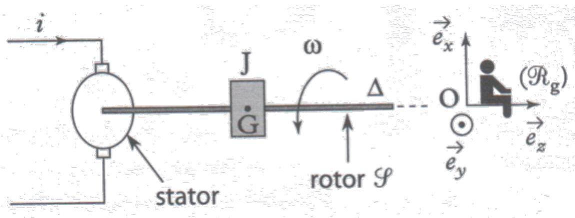
On modélise l'action du ressort spiral par un couple de torsion $\Gamma = -C\theta$ par rapport à l'axe Δ. Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au balancier.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.
3. En déduire la pulsation ω_0 et la période T_0 des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre en fonction de J et C.
4. L'horloger souhaite que le balancier effectue 3 allers-retours par seconde. En déduire la valeur numérique de la constante de torsion C.
5. Par analogie avec un ressort, on peut écrire l'énergie potentielle de torsion sous la forme :
$$E_p = \frac{1}{2}C\theta^2$$
   5.1. En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m du système.
   5.2. Retrouver l'équation établie en 2. en utilisant un théorème énergétique.
6. On considère à présent les frottements de l'air. On les modélise par un couple de frottement visqueux qui, en projection sur l'axe Δ s'écrit : $M_{\Delta,\text{frott}} = -2aJ\dot{\theta}$ où a est une constante positive.
   6.1. Déterminer les dimensions du coefficient a par analyse dimensionnelle.
   6.2. Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps.
   6.3. On suppose $10a = \omega_0$. Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur ainsi constitué ? Représenter l'allure de l'angle θ au cours du temps.

Machines tournantes :

Exercice 5 : Mise en rotation d'un moteur

On étudie la phase de mise en rotation du rotor S (partie tournant) d'un moteur de robotique dans le référentiel terrestre.



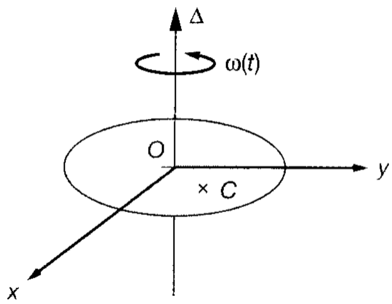
Le rotor S, de moment d'inertie $J = 10{,}7.10^{-7}\ kg.m^2$ est soumis à un couple moteur C_m dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant i traversant le stator (partie fixe) du moteur :

$$C_m = k.i \quad avec\ k = 22.10^{-3}\ Nm.A^{-1}$$

Le courant i est constant : $i = I_0 = 0{,}1\ A$. On suppose que le centre de masse G du rotor est sur l'axe Δ.

1. On néglige tous les frottements.
   a. En utilisant le TMC, déterminer l'expression de la vitesse angulaire $\omega(t)$ de S en supposant qu'au départ S est au repos.
   b. Déterminer et calculer le temps T_0 mis pour atteindre la vitesse $\omega_0 = 1800\ rad.s^{-1}$.
2. En réalité, le rotor S est soumis à un couple de frottement sec $C_s = 400\ \mu N.m$ et à un couple de frottement fluide $C_f = \lambda\omega$ ($\lambda = 10^{-6}Nm$), tous deux s'opposant au mouvement.
   a. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\omega(t)$
   b. Quelle est la vitesse angulaire maximale que pourra atteindre le moteur ?
   c. Déterminer le temps T mis pour atteindre le régime permanent (à 5%). Conclure.

Exercice 6 : Réaction d'axe



Un disque non homogène de centre O, de masse m et de rayon R est en liaison pivot autour de l'axe Δ à la vitesse angulaire ω. La liaison pivot est supposée parfaite. Le centre d'inertie du disque noté C est tel que $OC = a$. On note J le moment d'inertie du disque.

1. Initialement, la vitesse angulaire du disque vaut ω_0. Que dire de $\omega(t)$?
2. Déterminer la réaction R de l'axe sur le disque en fonction de a, ω_0 et m.
3. Pourquoi a-t-on intérêt à diminuer a, notamment lors de rotations rapides ? C'est ce que l'on nomme l'équilibrage statique.

<u>Capacités exigibles :</u>

- Différencier un solide d'un système déformable.
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et exprimer sa vitesse (v = R.ω)
- Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Exprimer le moment d'une force par rapport à un point et à un axe orienté, en privilégiant l'utilisation du bras de levier.
- Définir un couple de forces, le moment d'un couple
- Définir une liaison pivot parfaite et justifier la valeur de son moment.
- Établir l'équation différentielle d'un système à l'aide du théorème du moment cinétique.
- Établir l'équation du mouvement du pendule pesant. Établir l'intégrale première du mouvement.
- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation, loi de l'énergie cinétique.
- Système déformable :
  - Prendre en compte le travail des forces intérieures.
  - Réaliser le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

<u>QCM d'entraînement :</u>