

## NOTIONS AU PROGRAMME

### Fonctions : Révision du programme d'analyse de première année

(la majeure partie des exercices d'écrits et d'oraux de TSI portent sur les fonctions à valeurs réelles et non vectorielles)

- ★ Limite, continuité, dérivabilité, prolongements continus, prolongements de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou plus)
- ★ Théorèmes classiques (Valeurs intermédiaires, Rolle, Accroissements finis, Formule de Leibniz ...)
- ★ Formule de Taylor-Young, Développement Limités, ...
- ★ Étude de fonctions,
- ...

### Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

- 1) Fonctions de  $D \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^p$  ( $p = 2$  ou  $3$ ), continuité

  - (a) Fonctions coordonnées, Caractérisation de la limite à l'aide des fonctions coordonnées;
  - (b) Opérations algébriques; structure de  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, fonction bornée;
  - (c) Limites, opérations sur les limites;
  - (d) Continuité, Caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées.

- 2) Dérivation de fonctions de  $D \subset \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^p$  ( $p = 2$  ou  $3$ )

  - (a) Dérivabilité en un point: dérivée, dérivée à gauche, à droite, Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées; Interprétation géométrique et cinématique.
  - (b) Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, dérivable en  $a \Rightarrow$  continue en  $a$ ;
  - (c) Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles (+formule de Leibniz pour l'obtention des dérivées successives de fonctions du type  $t \mapsto \lambda(t)V(t)$ );
  - (d) Dérivées successives, applications de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle  $I$ , espaces vectoriels  $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^p)$  et  $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$  pour  $k \in \mathbb{N}$ , ou  $k = \infty$ ;
  - (e) Formule de Taylor-Young, développements limités.
  - (f) Pour  $p = 2$  ou  $3$  et  $\mathbb{R}^p$  euclidien (orienté), dérivation d'un produit scalaire, d'une norme, d'un déterminant et d'un produit vectoriel. (+formule de Leibniz pour l'obtention des dérivées successives)

### QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

- 1) Dérivée de la composée de deux fonctions(2pts) (*attention aux hypothèses pour la validité de la composition*) + Retrouver le développement limité à l'ordre  $2n + 1$  en 0 de  $\arctan$  à l'aide du théorème d'intégration des développements limités(3pts)
- 2) Égalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + dérivée du produit scalaire de deux fonctions réelles à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ (2,5pts)
- 3) Théorème de prolongement  $\mathcal{C}^1$  pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + Propriétés de la fonction  $\text{Arccos}$ (domaine, monotonie, dérivabilité, dérivée)(2,5pts)
- 4) Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^p$ (2,5pts) + dérivée de  $J : x \mapsto \|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x)|f(x) \rangle}$ (2,5pts) (*attention aux hypothèses*)
- 5) Théorème de la bijection continue pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + Propriétés de la fonction  $\text{Arcsin}$ (domaine, monotonie, dérivabilité, dérivée)(2,5pts)