

NOTIONS AU PROGRAMME

Reprise du programme de la semaine 3

Compléments d'algèbre linéaire

- 1) Famille quelconque de vecteurs :
 - (a) Définition d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base en dimension quelconque, Notamment familles de $\mathbb{K}[X]$
 - (b) Application linéaire et famille libre, resp. génératrice.
- 2) Sous-espaces vectoriels
 - (a) Définition de la somme de n sous-espaces vectoriels,
 - (b) Somme directe : Définition de la somme directe de n sev, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (*seule caractérisation au programme*), base adaptée à une décomposition en somme directe.
 - (c) Hyperplan d'un \mathbb{K} -ev de dimension n : définition comme sev de dimension $n - 1$, équations.
La définition d'un hyperplan vectoriel doit être connue, mais le théorème quant à lui n'est plus un attendu du programme, il a été vu en complément et les étudiants doivent retravailler la démonstration du théorème
 - (d) Théorème de caractérisation des hyperplans : Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension n et H un sev de E . Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :
 - (i) H est un hyperplan vectoriel de E
 - (ii) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$
 - (iii) il existe une forme linéaire non nulle f telle que $H = \text{Ker}(f)$
- 3) Sous-espaces stables - projections et symétries
 - (a) Sous-espace stable par un endomorphisme, matrice dans une base adaptée, interprétation d'une forme matricielle par blocs en termes de sous-espaces stables.
 - (b) Projection, Projecteur
Définition d'une projection, éléments caractéristiques ;
Définition d'un projecteur de E , caractérisation des projecteurs
(savoir montrer en exercice en étant un peu guidé que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$, $\text{Im}(p) = \text{Ker}(Id_E - p)$).
 - (c) Symétrie, Involution linéaire
Définition d'une symétrie, projection associée, éléments caractéristiques ;
Définition d'une involution linéaire, caractérisation des involutions linéaires.
- 4) Compléments sur les matrices
 - (a) Trace d'une matrice : Définition,
la trace est une forme linéaire non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$,
Deux matrices semblables ont la même trace, mais la réciproque est fausse.
 - (b) Trace d'un endomorphisme
 - (c) Transposée d'une matrice : Définition, Notation : A^\top ,
Opérations sur les transposées : Combinaison linéaire, produit, inverse, $\text{Tr}(A^\top) = \text{Tr}(A)$.
Définition des matrices symétriques, antisymétriques, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (à savoir montrer en exercice).

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

- 1) Définition d'un hyperplan vectoriel + théorème de caractérisation des projecteurs
- 2) Dans le théorème de caractérisation des hyperplans (qui sera redonné), démontrer que (i) \Rightarrow (ii).
- 3) Définition d'un sev stable par un endomorphisme + théorème de caractérisation des involutions linéaires
- 4) Définition et propriétés de l'application Tr + montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
- 5) Définition de $S_n(\mathbb{K})$, de $A_n(\mathbb{K})$ et propriétés (*pour info : sev, bases, dimensions, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$*)
- 6) Démontrer qu'une forme linéaire non nulle sur E est surjective + Dans le théorème de caractérisation des hyperplans (qui sera redonné), démontrer que (iii) \Rightarrow (i).