NOTIONS AU PROGRAMME

Rappels de Probabilités de TSI1

1) Probabilités
   - ⋆ Définition d'une expérience aléatoire, d'un événement, événements incompatibles, système complet d'événements, d'une probabilité sur un univers Ω
   - ⋆ Probabilité conditionnelle, Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes,
   - ⋆ Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.
2) Variables Aléatoires
   - ⋆ Définition d'une variable aléatoire,
   - ⋆ loi d'une variable aléatoire, fonction de répartition
3) Espérance, variance, Écart type d'une variable aléatoire réelle discrète finie
   - ⋆ Définition de l'espérance, propriété de linéarité, de positivité, Théorème de transfert
   - ⋆ Définition de la variance, de l'écart type d'une variable aléatoire,
   - ⋆ Formule de Kœnig-Huygens, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
   - ⋆ Variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire
4) Lois usuelles
   - ⋆ Loi certaine, loi uniforme
   - ⋆ Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(p)$. Reconnaissance d'un schéma de Bernoulli.
   - ⋆ Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, notée $\mathcal{B}(n,p)$.
     Reconnaissance de situations relevant d'une loi binomiale.
   - ⋆ Espérance et variance associées à ces lois

Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

5) Couple de variables aléatoires
   (a) Couple de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales
   (b) Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$
   (c) Extension aux n-uplets de variables aléatoires

6) Variables aléatoires indépendantes
   (a) Couple de variables aléatoires indépendantes
   (b) Pour 2 variables aléatoires indépendantes X et Y,
   - ⋆ $\mathbb{P}\big((X,Y) \in A \times B\big) = \mathbb{P}\big(X \in A\big)\mathbb{P}\big(Y \in B\big)$
   - ⋆ $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes

   (c) Variables aléatoires mutuellement indépendantes
   - ⋆ Définition, généralisation des résultats précédents
   - ⋆ Si $X_1, \cdots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\sum_{k=1}^{n} X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$

7) Covariance, Coefficient de corrélation linéaire
   (a) Covariance d'un couple de variables aléatoires ($Cov(X,Y)$), coefficient de corrélation linéaire($\rho(X,Y)$)
   (b) Propriétés de bilinéarité et symétrie de la covariance, $Cov(X,a) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(X) = Cov(X,X)$, $\mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2abCov(X,Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$;
   (c) Inégalité $\left|\rho(X,Y)\right| \leqslant 1$, caractérisation des égalités $\rho(X,Y) = 0$ et $\rho(X,Y) = \pm 1$;
   (d) Pour 2 variables aléatoires indépendantes X et Y,
   $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $Cov(X,Y) = 0$ et $\mathbb{V}(aX+bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y)$

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

1) Formule des probabilités composées pour n événements, préciser le cas où les événements sont mutuellement indépendants + Définition de la covariance de (X, Y) et expression simplifiée, préciser le cas où X et Y indépendantes.
2) Définition d'un système complet d'événements(cas de n événements) + Formule des probabilités totales + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$.
3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ + Expression des lois marginales de X et Y à partir de la loi conjointe de (X, Y), préciser le théorème de première année permettant de retrouver ce résultat.
4) Définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X + Théorème de transfert + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$.
5) Formule de Bayes + Inégalité de Bienaimé - Tchebychev + définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
6) Définition de la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X, formule de Koenig-Huygens + développement de $\mathbb{V}(aX + bY)$, préciser le cas où (X, Y) couple de variables aléatoires indépendantes.

