Déterminants

L'objectif essentiel de ce chapitre est de ***savoir calculer un déterminant de vecteurs, de matrices, d'endomorphismes et/ou de le mettre sous forme « factorisée »à l'aide d'opérations sur les rangées et par développement par rapport à une rangée****. On évitera toute technicité excessive de calculs portant sur les déterminants.*

Merci de commencer par un exercice en dimension $\leqslant 5$ ***afin de vérifier la maîtrise des différentes techniques (cf 3)) permettant le calcul d'un déterminant.***

Déterminant d'une matrice carrée

1) Théorème-Définition :
   Il existe une unique application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, appelée déterminant, telle que :
   (i) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de A ;
   (ii) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'échange de 2 colonnes de A a pour effet de multiplier le $f(A)$ par -1 ;
   (iii) $f(I_n) = 1$.
   *(**Attention :** la notion de forme multilinéaire est Hors-Programme)*
2) Interprétation géométrique du déterminant lorsque $n = 2$ ou 3.
3) Propriétés du déterminant
   a) Le déterminant d'une matrice ayant 2 colonnes égales est nul.
   b) Effet sur un déterminant des opérations élémentaires sur les colonnes,
      en particulier $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
   c) Déterminant d'une matrice triangulaire, déterminant d'un produit de matrices carrées, de la transposée d'une matrice.
   d) Calcul du déterminant d'une matrice à l'aide de la méthode du pivot de Gauss
   e) Matrice carrée inversible et déterminant ;
   f) Développement par rapport à une rangée du déterminant d'une matrice.
   g) *La Notion de Comatrice est hors-Programme*

Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

1) Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension n :
   Définition, caractérisation des bases.*(Formule de changement de bases Hors-Programme)*
2) Déterminant d'un endomorphisme :
   a) Définition du déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes,
   b) Caractérisation des automorphismes.

Les notions abordées dans le chapitre d'algèbre de début d'année pourront être réinvesties, mais cela doit représenter une petite partie de l'oral.

Attention, les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 n'ont pas encore été traitées, aussi merci de guider les étudiants si vous arrivez sur ce genre de suites lors du calcul d'un déterminant de taille n

Possibilité de poser, en fin de khôlle, un exercice de probabilités portant sur le programme précédent, questions de cours inchangées

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

1) Formule des probabilités composées pour n événements, préciser le cas où les événements sont mutuellement indépendants + Définition de la covariance de (X, Y) et expression simplifiée, préciser le cas où X et Y indépendantes.
2) Définition d'un système complet d'événements(cas de n événements) + Formule des probabilités totales + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$.
3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$ + Expression des lois marginales de X et Y à partir de la loi conjointe de (X, Y), préciser le théorème de première année permettant de retrouver ce résultat.
4) Définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X + Théorème de transfert + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, expression de la loi de X, $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X)$.
5) Formule de Bayes + Inégalité de Bienaimé - Tchebychev + définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
6) Définition de la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X, formule de Koenig-Huygens + développement de $\mathbb{V}(aX + bY)$, préciser le cas où (X, Y) couple de variables aléatoires indépendantes.

