

Exercice de révision assez court sur les programmes de khôlle précédents

Séries entières :

Les objectifs de cette première khôlle sur les séries entières sont :

- vérifier les méthodes d'obtention du rayon de convergence (pas toujours avec la règle de D'Alembert appliquée aux séries numériques),
- connaître les développements usuels et savoir les utiliser pour obtenir un développement en série entière en 0 d'une fonction,
- maîtriser les calculs élémentaires permettant d'obtenir une expression simplifiée de la fonction somme d'une série entière.

Pas au programme de khôlle cette semaine : série entière et équation différentielle

Séries Entières à coefficients réels ou complexes

1) Rayon de convergence d'une série entière

(a) Définition d'une série entière ;

(b) Lemme d'Abel

(c) Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ , (a_n r^n) \text{ est bornée } \}$

(d) Convergence d'une série entière :

★ Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

(La règle de D'Alembert relative aux séries entières est Hors-Programme, mais on pourra se ramener à la règle de D'Alembert sur les séries numériques)

★ Le rayon de convergence est $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ , \sum |a_n| r^n \text{ converge} \} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ , (a_n r^n) \text{ converge vers } 0 \}$;

(e) Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence ;

(toute étude systématique de la convergence sur le cercle est exclue)

(f) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b :

★ Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_b \leq R_a$

★ Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$

(g) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

(h) Opérations algébriques : somme de deux séries entières, produit par un scalaire ;

(La notion de série produit est Hors-Programme)

2) Fonction somme d'une série entière d'une variable réelle :

(a) Fonction somme, domaine de définition ;

(b) Propriétés (Admises) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation, classe \mathcal{C}^∞ et intégration terme à terme (conservation du rayon de convergence).

(Notion de prolongement par continuité aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence Hors-Programme)

3) Développement en série entière autour de 0

(a) Définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ;

(b) Unicité du développement en série entière, lien avec la série de Taylor de f au voisinage de 0 ;

(c) Développements usuels en série entière :

e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan } x$, $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Les fonctions ch et sh ne sont pas au programme de TSI)

$\forall z \in \mathbb{C} , |z| < 1 , \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$

4) Exponentielle complexe

Expression (Admise), pour $z \in \mathbb{C}$, de $\exp(z)$ comme somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$