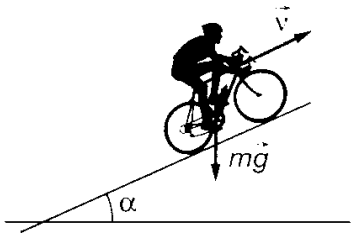
Travaux dirigés de Mécanique n°3

Application directe du cours

Exercice 1 : Puissance d'une force



Un cycliste, de masse $m = 100$ kg avec bicyclette incluse, effectue l'ascension du Mont Ventoux. Il roule à la vitesse constante $v = 10{,}5\ \mathrm{km.h^{-1}}$ sur une pente inclinée de 7 % (C'est-à-dire : $\tan\alpha = \frac{7}{100}$)

1. Déterminer l'expression de la puissance $P(\vec{P})$ du poids en fonction de m, g, v et α ?
2. Effectuer l'application numérique.
3. Un cycliste peut-il, grâce à un vélo et une génératrice, recharger un téléphone portable ? un ordinateur ? faire fonctionner un grille-pain ?
   (Eléments de réponse dans la vidéo à regarder via le QR code)

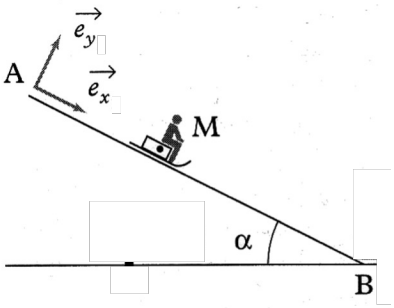
Application des théorèmes énergétiques

Exercice 2 : Tir vertical

Un objet est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale $V_0 = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Quelle altitude maximale H va-t-il atteindre ? On utilisera le théorème de l'énergie cinétique on négligera les frottements.

<u>Application :</u> Déterminer la vitesse initiale que vous êtes capable de générer lors d'un saut à la verticale sans élan.

Exercice 3 : Les TSI font du Ski



Un étudiant de TSI, assimilé à un point matériel M de masse m, descend une piste de ski faisant un angle α avec l'horizontale. Il est initialement situé immobile en A puis glisse jusqu'en B sur une distance L.

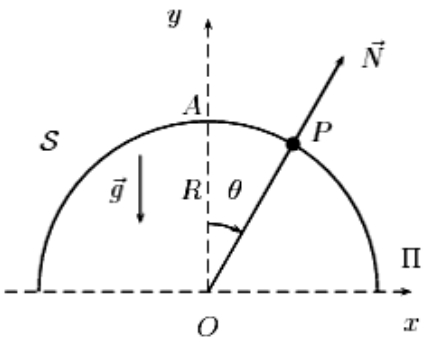
Le skieur de masse m est évidemment soumis à son poids mais également aux frottements solides.
On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force exercée par la piste, et f le coefficient de frottement solide tel que $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On note (Ox) l'axe parallèle au plan incliné et (Oy) l'axe perpendiculaire au plan.

Pour les applications numériques, on choisira : $\alpha = 25°$ (piste bleue), $L = 50$ m et $f = 0{,}10$.

1. En appliquant le PFD, déterminer l'expression de $N = \|\vec{N}\|$. En déduire celle de $T = \|\vec{T}\|$
2. Déterminer le travail entre A et B de $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ en fonction de m, g, f, L et α.
3. A l'aide d'un théorème énergétique, déterminer l'expression de la vitesse du skieur au point B. (on suppose que sa vitesse initiale en A est nulle).
4. Effectuer l'application numérique.

Exercice 4 : Happy feet

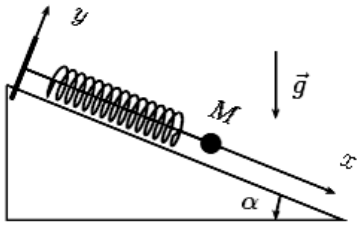


Un pingouin P assimilable à un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale en équilibre instable au sommet A d'un igloo (demi-sphère S de rayon R et de centre O) posée sur la banquise (plan Π). Le contact entre S et P est supposé sans frottement.
A la suite d'un déséquilibre infinitésimal, le pingouin P se met en mouvement en restant dans le plan vertical Oxy. On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, P reste constamment en contact avec S. Sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$.

1. Déterminer la vitesse du pingouin P en fonction de θ, g et R.
2. Exprimer la projection de $\vec{N}$ sur OP en fonction de θ, g et m.
3. En déduire la valeur θ_0 de θ pour laquelle le pingouin P n'est plus en contact avec l'igloo (phase (2) du mouvement de P) ainsi que l'expression de la vitesse v_0 de P en ce point.
4. Décrire l'allure de la trajectoire ultérieure du pingouin P.

Mouvement conservatif

Exercice 5 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

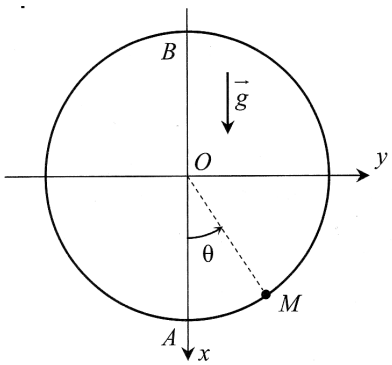


On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox colinéaire au plan incliné (voir figure).
On choisira O comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

On donne $m = 0{,}2$ kg ; $l_0 = 30$ cm ; $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$; $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et $\alpha = 30°$.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale E_p de M en fonction des données et de x puis représenter la courbe de E_p en fonction de x.
2. En déduire l'expression de la position d'équilibre x_{eq} de M.
3. Montrer que l'énergie mécanique de M est constante.
4. On lâche M depuis l'abscisse $x = 20$ cm avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ où $v_0 = 1{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
   En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'amplitude du mouvement de M ?
5. A l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période des oscillations.

Exercice 6 : Equilibre et mouvement sur un cercle.



Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon r. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, le plus bas du cerceau. On repère sa position par l'angle θ.

1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ. (On choisira l'origine de l'énergie potentielle en $x = 0$)
2. Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de M.
3. On cherche à déterminer le mouvement de M selon la vitesse initiale.
   a. Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner son expression en fonction de m, g, r et v_0.
   b. En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.
4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.

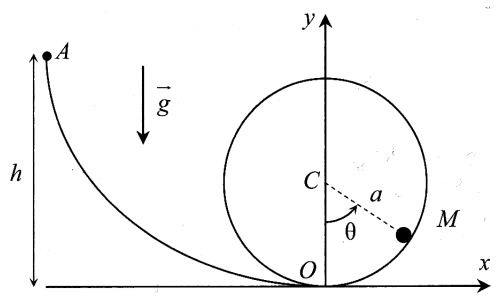
Pour aller plus loin

Exercice 7 : Cascade périlleuse **

Un adapte du roller, assimilé à un point M de masse m, se lâche sans vitesse initiale depuis le point A d'une rampe, située à une hauteur h au dessus de O, point le plus bas de la rampe.

A partir de O, la rampe a une forme cylindrique de rayon a : le patineur peut rouler à l'intérieur de ce cylindre en restant dans le plan vertical (Oxy), et éventuellement faire le tour complet. Le contact est sans frottement sur toutes les surfaces.

On note $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_y}$ l'accélération de la pesanteur, et on désigne par $\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM}$ le vecteur unitaire radial par rapport au cercle.



1. Déterminer l'expression de la norme v_O de la vitesse du patineur lorsqu'il arrive au point O.
2. Déterminer la norme $v(M)$ de la vitesse du patineur en un point M du cercle, repéré par l'angle θ.
3. Montrer que la réaction exercée par le support cylindrique sur le patineur s'exprime sous la forme :

$$\vec{N} = -mg\left(\frac{2h}{a} + 3\cos\theta - 2\right)\overrightarrow{e_r}$$

4. Que se passe-t-il si, en un point du cylindre, v s'annule avec N non nulle ? (Répondre sans calcul).
5. Que se passe-t-il si c'est la réaction N qui s'annule avec v non nulle ? (Répondre sans calcul).
6. En déduire l'expression de la hauteur minimale h pour que le cascadeur puisse faire un tour complet.

Capacités exigibles :

- Les définitions de la **puissance et du travail** d'une force.
- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
- **Théorème de l'énergie cinétique et théorème de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen**
  - Utiliser la loi appropriée en fonction du contexte.
- **Energie potentielle. Energie mécanique.**
  - Distinguer force conservative et force non conservative.
  - Etablir et citer les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme) et de l'énergie potentielle élastique
- **Mouvement conservatif :**
  - Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
  - Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
  - Identifier une barrière et un puits de potentiel.
  - Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et la nature stable ou instable de ces positions.
  - Réaliser le bilan énergétique d'un oscillateur mécanique en absence, puis en présence de frottement en régime libre.

QCM d'entraînement :