Espace Préhilbertien Réel et Espace Euclidien

Le but de ce premier passage sur les espaces préhilbertiens réels est de tester la connaissance et la maîtrise des notions de base sur les espaces préhilbertiens réels. Pas d'exercice trop technique, ni trop théorique.
(Produit scalaire, norme euclidienne, orthogonalité, Inégalité de Cauchy Schwarz, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, expression du produit scalaire et de la norme euclidienne, puis dans un second temps projection et symétrie orthogonale dans des cas simples et ***en utilisant l'expression du projeté dans une base orthonormée,*** *notion de distance si le reste est assimilé)*

1) Produit scalaire et norme associée
   (Les formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques ne sont plus au programme)
   (a) Définitions, premiers exemples
      - ⋆ Définition du produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-ev E, d'un espace préhilbertien réel, d'un espace euclidien ;
      - ⋆ Exemples : Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produits scalaires sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, sur $\mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R})$, sur $\mathbb{R}[X]$ (définis par une intégrale, par une somme, ...), produit scalaire de matrices, ...

   (b) Norme euclidienne associée à un produit scalaire, distance associée,
   (c) Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité,
   (d) Identités de polarisation, Identité du parallélogramme.
   (e) Utilisation des identités de polarisation, pour montrer qu'une application définit une norme euclidienne sur E.

2) Orthogonalité, orthonormalité
   (a) Orthogonalité de vecteurs, famille orthonormale,
   (b) Relation et théorème de Pythagore,
   (c) Sous-espaces orthogonaux, orthogonal d'un sous-espace vectoriel de E ;
   (d) Procédé d'orthonormalisation de Schmidt, Existence de bases orthonormales en dimension finie ;
   (e) Expression des coordonnées d'un vecteur, du produit scalaire dans une base orthonormale de E ;

3) Projection orthogonale :
   (a) Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E,
   et en dimension finie dimension de $F^\perp$
   (b) Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie
      - ⋆ Définition de la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E,
      - ⋆ Expression, dans une base orthonormale de F, du projeté orthogonal d'un vecteur non nul de E

      Les étudiants doivent savoir déterminer le projeté orthogonal $p_F(x)$ d'un vecteur x sur un sev F en calculant son expression dans une base orthonormale de F

   (c) Symétrie orthogonale par rapport à un sev de dimension finie.
   (d) Distance d'un point à un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E.

