

## Isométries d'un espace euclidien - Matrices symétriques réelles

Pour les isométries vectorielles (aussi appelées automorphismes orthogonaux), les objectifs principaux sont de savoir déterminer la matrice dans la base canonique d'une isométrie de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , de savoir déterminer si une matrice est bien la matrice d'une isométrie vectorielle et de caractériser cette isométrie, ainsi que de connaître la définition d'une isométrie.

Les exercices plus théoriques sur les isométries ne seront proposés que si le reste est bien maîtrisé.

### 1) Isométrie vectorielle d'un espace euclidien

#### (a) Isométrie vectorielle

- ★ Définition : une isométrie vectorielle est un endomorphisme (de  $E$  euclidien) conservant la norme ;
- ★ Caractérisation par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale ;
- ★ Une isométrie est un automorphisme de  $E$  ;
- ★ Spectre d'une isométrie.

#### (b) Symétrie orthogonale

- ★ Définition d'une symétrie orthogonale ;
- ★ Réflexion d'hyperplan  $H$ , unicité de la réflexion transformant  $\vec{a}$  en  $\vec{b}$ .

#### (c) Groupe orthogonal $O(E)$ : vérification des propriétés conférant à $O(E)$ une structure de groupe. (définition axiomatique des groupes Hors-Programme)

#### (d) Stabilité de l'orthogonal d'un sev stable par une isométrie vectorielle

### 2) Matrice orthogonale :

#### (a) Définition d'une matrice orthogonale, caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes ;

#### (b) Les matrices orthogonales sont les matrices de passage entre bases orthonormales ;

#### (c) Matrices orthogonales et isométries vectorielles : lien dans une base orthonormale de $E$ , $O_n(\mathbb{R})$ groupe orthogonal d'ordre $n$

#### (d) Déterminant d'une isométrie vectorielle, d'une matrice orthogonale :

- ★ isométrie positive, négative,
- ★ définition de  $\mathcal{SO}(E)$ , de  $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$
- ★ Notion de base orthonormale directe, application à l'orientation d'un espace euclidien

### 3) Isométries du plan et de l'espace

#### (a) Étude des Isométries du plan vectoriel euclidien : rotations et symétries, classification à l'aide des éléments propres, caractéristiques géométriques.

#### (b) Étude des Isométries de l'espace vectoriel euclidien :

- ★ Éléments propres d'une isométrie de l'espace, utilisation pour la classification,
- ★ Expression de la matrice d'une isométrie (directe ou indirecte) dans une base bien choisie,
- ★ Identification d'une isométrie (directe ou indirecte) et de ses caractéristiques géométriques à partir de sa matrice dans une base orthonormale ;
- ★ Expression de la matrice dans une base orthonormale d'une isométrie donnée ;

### 4) Matrice symétriques, Réduction

(Notion d'endomorphisme symétrique Hors-Programme)

#### (a) Rappel de la définition d'une matrice symétrique,

#### (b) Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont 2 à 2 orthogonaux,

#### (c) Théorème spectral : (ADMIS) Réduction d'une matrice symétrique réelle.

Deux exercices sur les matrices symétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le rang est faible ont été traités  
Réduction des coniques Hors-Programme (Possible, mais il faut donner la méthode détaillée)