Reprise des anciens programmes sur les probabilités

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

1) Variable Aléatoire - Loi de Probabilité
   (a) Définitions
      i. Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers dénombrable.
      ii. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète X. Notation P_X
      iii. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète X. Notation F_X
      iv. Variables aléatoires 2 à 2 indépendantes, mutuellement indépendantes.
   (b) Propriétés
      i. Croissance de F_X, $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x)=1$
      ii. Obtention de la loi d'une variable aléatoire réelle discrète à partir de l'expression de sa fonction de répartition.
      iii. Image d'une variable aléatoire par une application à valeurs réelles. Propriété pour des variables aléatoires indépendantes.
2) Espérance
   (a) Définition
      i. X est d'espérance finie si la série $\sum x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ est absolument convergente.
      ii. Dans ce cas, notation $\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n\mathbb{P}(X=x_n)$
   (b) Propriétés
      i. Linéarité de l'espérance, propriété de positivité de l'espérance ;
      ii. Théorème de transfert : Si f application a valeurs réelles, définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)=\{x_n\ ,\ n\in\mathbb{N}\}$, alors $f(X)$ est d'espérance finie ssi la série $\sum f(x_n)\mathbb{P}(X=x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas $\mathbb{E}(f(X))=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)\mathbb{P}(X=x_n)$.
3) Variance
   (a) Définition
      i. Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2), alors X est d'espérance finie
      ii. Dans ce cas, définition de la variance par : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$.
      iii. Écart type d'une variable aléatoire.
   (b) Propriétés
      i. Si X^2 est d'espérance finie, $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$
      ii. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$;
      iii. $\mathbb{V}(X)=0$ ssi X presque sûrement constante.
      iv. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev *(inégalité de Markov **Hors-Programme**)*
4) Lois usuelles
   (a) Loi géométrique de paramètre p
      i. Définition, Notation $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$
      ii. Reconnaissance de situations modélisables par un loi géométrique.
      iii. Interprétation comme le rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p.
      iv. Espérance et variance
   (b) Loi de Poisson de paramètre λ
      i. Définition, Notation $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$
      ii. Reconnaissance de situations modélisables par un loi de Poisson.
      iii. Espérance et variance
      iv. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout $n\in\mathbb{N}, X_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n=\lambda$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(X_n=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

         Cas pratique : pour $n\geqslant 30$, $p_n\leqslant 0,1$ et tels que $np_n\leqslant 15$:

         Si $X_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p_n)$, alors $\forall k\in[\![0,n]\!]$, $\mathbb{P}(X_n=k)\approx\dfrac{(np_n)^k}{k!}e^{-np_n}$

   *La notion de convergence en loi est **Hors-Programme***