Séries de Fourier

Chapitre plus orienté sur les calculs des coefficients de Fourier, l'obtention de sommes de séries, l'approximation d'ondes, de signaux que sur la partie théorique d'espace préhilbertien réel

1) Fonctions définies par morceaux sur $[a, b]$
   (a) Applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a, b]$, opérations
   (b) Applications T-périodiques, de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, structure d'espace vectoriel de $\mathcal{CM}_T(\mathbb{R})$
   (c) Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$
   (d) Intégrale d'une fonction continue par morceaux, T-périodique. Invariance par translation.

2) Structure d'espace euclidien de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$
   (a) Produit scalaire, norme euclidienne associée ;
   (b) Famille orthonormale $\{c_0, \sqrt{2}c_1, \ldots, \sqrt{2}c_n, \ldots, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_n, \ldots\}$ de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$,
   (c) Projection orthogonale sur $E_n = \{c_0, \sqrt{2}c_1 \ldots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_1, \ldots, \sqrt{2}s_n\}$.

3) Coefficients de Fourier, série de Fourier
   (a) Définition des coefficients de Fourier réels d'une fonction de $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$: $a_0(f) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)dt$,
   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)dt$, $b_n(f) = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)dt.$
   (les coefficients complexes sont hors-programme, mais dans certains cas il peut être intéressant de calculer $a_n(f) + ib_n(f)$)
   (b) Cas trés fréquent des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$.
   (c) Propriétés de « linéarité »des coefficients de Fourier ;
   (d) Cas de simplification pour une fonction paire, pour une fonction impaire,
   (e) vu rapidement pour une fonction vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$, $f\left(x + \frac{T}{2}\right) = -f(x)$(non exigible)
   (f) Sommes partielles de la série de Fourier, lien avec la projection sur $E_n = \{c_0, \ldots, c_n, s_1, \ldots, s_n\}$.

3) Inégalité de Bessel, Formule de Parseval (ADMIS)

4) Convergence d'une série de Fourier : Théorèmes de DIRICHLET (ADMIS)
   (a) Régularisée de la fonction $f \in \mathcal{CM}_T(\mathbb{R})$
   (b) Théorème de Dirichlet dans le cas d'une fonction T-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$;
   (c) Théorème de Dirichlet dans le cas d'une fonction T-périodique, **continue** sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

5) Exemples Usuels : Signal triangulaire, signal « dent de scie », signal créneau.

6) Liens entre les coefficients de Fourier de f et ceux de f' vus en classe, mais les formules ne sont pas au programme. En cas de besoin, il faut les justifier au préalable.

