

NOTIONS AU PROGRAMME

Rappels de Probabilités de TSI1

1) Probabilités

- ★ Définition d'une expérience aléatoire, d'un événement, événements incompatibles, système complet d'événements, d'une probabilité sur un univers Ω
- ★ Probabilité conditionnelle, Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes,
- ★ Indépendance de 2 événements, indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

2) Variables Aléatoires

- ★ Définition d'une variable aléatoire,
- ★ loi d'une variable aléatoire, fonction de répartition

3) Espérance, variance, Écart type d'une variable aléatoire réelle discrète finie

- ★ Définition de l'espérance, propriété de linéarité, de positivité, Théorème de transfert
- ★ Définition de la variance, de l'écart type d'une variable aléatoire,
- ★ Formule de Koenig-Huygens, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
- ★ Variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire

4) Lois usuelles

- ★ Loi certaine, loi uniforme
- ★ Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(p)$. Reconnaissance d'un schéma de Bernoulli.
- ★ Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$, notée $\mathcal{B}(n, p)$.
Reconnaissance de situations relevant d'une loi binomiale.
- ★ Espérance et variance associées à ces lois

Compléments sur les variables aléatoires réelles finies

5) Couple de variables aléatoires

- (a) Couple de variables aléatoires : loi conjointe, lois marginales
- (b) Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$
- (c) Extension aux n -uplets de variables aléatoires

6) Variables aléatoires indépendantes

- (a) Couple de variables aléatoires indépendantes
- (b) Pour 2 variables aléatoires indépendantes X et Y ,
 - ★ $\mathbb{P}((X, Y) \in A \times B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$
 - ★ $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes
- (c) Variables aléatoires mutuellement indépendantes
 - ★ Définition, généralisation des résultats précédents
 - ★ Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $\sum_{k=1}^n X_k$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$

7) Covariance, Coefficient de corrélation linéaire

- (a) Covariance d'un couple de variables aléatoires ($Cov(X, Y)$), coefficient de corrélation linéaire ($\rho(X, Y)$)
- (b) Propriétés de bilinéarité et symétrie de la covariance, $Cov(X, a) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{V}(X) = Cov(X, X)$,
 $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2abCov(X, Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$;
- (c) Inégalité $|\rho(X, Y)| \leq 1$, caractérisation des égalités $\rho(X, Y) = 0$ et $\rho(X, Y) = \pm 1$;
- (d) Pour 2 variables aléatoires indépendantes X et Y ,
 $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, $Cov(X, Y) = 0$ et $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y)$

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

- 1) Formule des probabilités composées pour n événements, préciser le cas où les événements sont mutuellement indépendants + Définition de la covariance de (X, Y) et expression simplifiée, préciser le cas où X et Y indépendantes.
- 2) Définition d'un système complet d'événements (cas de n événements) + Formule des probabilités totales + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, expression de la loi de X , $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$.
- 3) Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$, expression de la loi de X , $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ + Expression des lois marginales de X et Y à partir de la loi conjointe de (X, Y) , préciser le théorème de première année permettant de retrouver ce résultat.
- 4) Définition de l'espérance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X + Théorème de transfert + Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, expression de la loi de X , $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$.
- 5) Formule de Bayes + Inégalité de Bienaimé - Tchebychev + définition et propriétés du coefficient de corrélation linéaire.
- 6) Définition de la variance d'une variable aléatoire réelle discrète finie X , formule de Koenig-Huygens + développement de $\mathbb{V}(aX + bY)$, préciser le cas où (X, Y) couple de variables aléatoires indépendantes.