

NOTIONS AU PROGRAMME

SUITES ET SÉRIES NUMÉRIQUES

Rappels de TSI1 sur les suites réelles et complexes

- 1) Définitions : suites convergentes, divergentes, suites majorées, minorées, bornées, suites monotones, suites extraites, suites adjacentes, suites arithmétiques, suites géométriques...
(les suite récurrentes linéaires d'ordre 2 et les suites arithmétoco-géométriques ne sont pas au programme de TSI1)
- 2) Limite d'une suite : toute suite convergente est bornée, opérations sur les limites, théorème d'encadrement, théorème de prolongement des inégalités, limite et relation d'ordre, suite extraite d'une suite convergente, théorème de la limite monotone, propriété de convergence d'une suite dont les suites extraites des termes pairs et des termes impairs convergent vers une même limite, théorème sur les suites adjacentes, ...
- 3) Relations de comparaison : suite dominée par, négligeable devant, équivalente à, comparaison des suites de référence, deux suites équivalentes ont le même signe à partir d'un certain rang, utilisation de développements limités pour déterminer un équivalent...
- 4) Extension aux suites complexes : $\operatorname{Re}(u_n)$, $\operatorname{Im}(u_n)$, $\bar{u_n}$, $|u_n|$, suite bornée, limite et caractérisation avec les parties réelles et imaginaires, opérations sur les limites.
- 5) Récurrences, travail sur les sommes, changements d'indice, les factorielles, ...
- 6) Suites dont les termes sont définis par des intégrales (Intégration par parties non revue en détail, seulement utilisé dans les intégrales de Wallis)

Séries numériques réelles ou complexes

- 1) Généralités :
 - (a) Définitions : suite des sommes partielles, série, série convergente, divergente, reste de rang n d'une série convergente, ...
 - (b) Le terme général d'une série convergente tend vers 0, mais la condition n'est pas suffisante.
Bien être vigilant sur le fait que la réciproque est fausse
 - (c) Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire. Structure d'espace vectoriel des séries convergentes. **La notion de série produit est hors programme**
 - (d) La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge ssi la suite (u_n) converge.
- 2) Séries à termes réels positifs :
 - (a) Séries de référence : séries géométriques, séries de Riemann.
 - (b) Une série à termes positifs est convergente ssi la suite des sommes partielles est majorée.
 - (c) Théorème de comparaison par majoration-minoration.
(comparaison des convergences de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans le cas où $u_n \leq v_n$, $u_n = O(v_n)$ et $u_n = o(v_n)$)
 - (d) Théorème de comparaison par équivalence.
 - (e) Règle de d'Alembert.
- 3) Séries alternées : Le critère spécial des séries alternées est la seule notion au programme, avec l'encadrement du reste.
- 4) Séries absolument convergente :
 - (a) Définition, inégalité triangulaire.
 - (b) Une série absolument convergente est convergente, mais la réciproque est fausse.
 - (c) La règle du « $n^\alpha u_n$ » n'est pas explicitement au programme, il faut la justifier et guider les étudiants si besoin.
- 5) Théorème de comparaison série-intégrales :

Si $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature (ie converge ssi la suite $\left(\int_{n_0}^n f(t)dt\right)$ converge, ou encore ssi $\left(\int_{n_0}^x f(t)dt\right)$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$) et encadrement du reste par 2 intégrales dans le cas de convergence.

On pourra demander de déterminer un équivalent de la somme partielle en cas de divergence en reprenant les étapes de la démonstration par encadrement par des intégrales, mais il faudra alors guider les étudiants.