NOTIONS AU PROGRAMME

Rappels de TSI1 : Intégration sur un segment

Les étudiants doivent être capables de réaliser convenablement des intégrations par partie et des changements de variable

1) Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$
   (a) Définition de l'intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$,
   (b) Propriétés : linéarité, relation de Chasles, positivité et ses conséquences, *notamment justifier la monotonie (éventuellement stricte) d'une suite d'intégrales.*
   (c) Majoration en valeur absolue (pour $a < b$) : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$
   (d) Inégalité de la moyenne : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant M|b-a|$ où $M = \sup\limits_{[a,b]}(|f|)$
   (e) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour des fonctions continues sur $[a, b]$.
   (f) Extension aux fonctions à valeurs complexes (définitions et propriétés précédentes encore valables)
   (g) **Primitives des fonctions usuelles, reconnaissance d'expressions de la forme** $u'.f' \circ u$ et primitives correspondantes.
2) Sommes de Riemann
   (a) Définition de la somme de Riemann d'ordre n de f dans le cas d'une subdivision régulière de $[a, b]$ et interprétation graphique ;
   (b) **Reconnaître une somme de Riemann** et déterminer la limite de la suite des sommes de Riemann associée à f. *(Se ramener systématiquement à des subdivisions de* $[0, 1]$ *pour la reconnaissance)*
3) Intégration et dérivation
   (a) Définition d'une primitive, existence et unicité d'une primitive prenant la valeur y_0 en x_0 ;
   (b) Dérivée d'une fonction du type $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$;
   (c) Inégalité des accroissements finis ;
   (d) **Intégration par parties, Théorème de changement de variable**
4) Formules de Taylor
   (a) Formule de Taylor avec reste intégrale (ou aussi appleée Taylor-Laplace)
   (b) Inégalité de Taylor-Lagrange *(égalité Hors-Programme)*
   (c) Formule de Taylor-Young : existence d'un DL d'ordre n pour une fonction de classe C^n.
   (d) Calculs de développements limités.

Intégrales généralisées

Ce premier passage sur les intégrales généralisées a pour but de vérifier les connaissances sur la notion de convergence d'une intégrale par étude de la limite d'une primitive
Aucune théorème de comparaison au programme cette semaine

1) Intégrale généralisée
   (a) Sur l'intervalle borné
      i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction continue sur l'intervalle borné $[a, b[$, ou $]a, b]$;
      ii. Exemples fondamentaux : $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\int_0^1 \ln(t)\, dt$.
      iii. Cas d'une fonction prolongeable par continuité en b (resp. en a).
   (b) Sur l'intervalle non borné
      i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction sur l'intervalle non borné $[a, +\infty[$, ou $]-\infty, b]$;

ii. Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.

(c) Définition d'une intégrale généralisée divergente.

2) Propriétés sur les intégrales généralisées :

(a) Convergence ou divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par l'étude de la limite d'une primitive de f.

(b) Relation de Chasles, Intégrales plusieurs fois impropres.

(c) Linéarité, positivité ;

(d) Théorème de changement de variable ***(Théorème direct sur les intégrales généralisées non vu, se ramener à un segment puis passer aux limites)***

(e) Intégration par parties ***(Pas de théorème direct au programme. Se ramener sur un segment, puis passer à la limite pour en déduire 2 intégrales de même nature)***

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

1) Égalité de Taylor-Laplace + Critère de convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ + primitive d'une fonction usuelle avec ou sans composition.

2) Inégalité de Taylor-Lagrange + Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ + primitive d'une fonction usuelle avec ou sans composition.

3) Formule de Taylor-Young + Critère de convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$, valeur en cas de convergence + primitive d'une fonction usuelle avec ou sans composition.

4) Théorème de changement de variable de TSI1 + Critère de convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ + primitive d'une fonction usuelle avec ou sans composition.

5) Théorème d'intégration par parties de TSI1 + Calcul de l'intégrale complexe $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t+i}$.

6) Définition d'une somme de Riemann pour une subdivision régulière de $[a, b]$, Théorème associé + Calcul d'une intégrale du type $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{at} \sin(kt)dt$ ou $\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{at} \cos(kt)dt$ en utilisant les exponentielles complexes.