Intégration sur un segment

Intégrales généralisées

1) Intégrale généralisée
   (a) Sur l'intervalle borné
      i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction continue sur l'intervalle borné $[a,b[$, ou $]a,b]$;
      ii. Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\displaystyle\int_0^1 \ln t dt$.
      iii. Cas d'une fonction prolongeable par continuité en b (resp. en a).
   (b) Sur l'intervalle non borné
      i. Définition d'une intégrale généralisée convergente dans le cas d'une fonction sur l'intervalle non borné $[a,+\infty[$, ou $]-\infty,b]$;
      ii. Exemples fondamentaux : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (Intégrales de Riemann) , $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$.
   (c) Définition d'une intégrale généralisée divergente.
2) Propriétés sur les intégrales généralisées :
   (a) Convergence ou divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par l'étude de la limite d'une primitive de f.
   (b) Relation de Chasles, Intégrales plusieurs fois généralisées.
   (c) Linéarité, positivité ;
   (d) Théorème de changement de variable ;
   (e) Intégration par parties ***(se ramener sur un segment, puis passer à la limite pour conclure que l'on a deux intégrales de même nature)***
3) Intégrales des fonctions positives
   (a) Critère de convergence (ex : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ majorée) ;
   (b) Théorèmes de comparaison par majoration, minoration, équivalence :
   relation entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et g sur $[a,b[$, lorsque $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de b, ou $f \underset{b}{=} o(g)$, ou $f \underset{b}{=} O(g)$, ou $f \underset{b}{\sim} g$;
   (Pour $f \underset{b}{\sim} g$, les étudiants doivent absolument signaler que g de signe constant au voisinage de b)
   si l'hypothèse de positivité n'est pas signalée, le théorème ne pourra pas être validé !
   (c) Adaptation de ces critères de convergence au cas des autres intervalles.
   (d) Propriété de nullité dans le cas d'une fonction positive, continue sur $[a,b[$, telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$
4) Intégrales absolument convergentes
   (a) Définition d'une intégrale généralisée absolument convergente ;
   (b) Une intégrale absolument convergente est convergente (Admis) ;
   (c) Définition d'une intégrale généralisée semi-convergente ; Ex : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$
   (d) Comparaison en module à des fonctions réelles positives : $|f| \leqslant g$, $|f| = o(g)$, $|f| = O(g)$, $f \sim g$.
   (e) Règle du t^α dans des cas simples. *(pas explicitement au programme, mais bien utile parfois !)*

QUESTIONS DE COURS : Identiques à la semaine passée

Possibilité de mixer les sous-questions pour proposer de nouvelles questions de cours

