

Exercice de révision assez court sur les programmes de khôle précédents

puis

Séries entières :

Les objectifs de cette première khôle sur les séries entières sont :

- vérifier les méthodes d'obtention du rayon de convergence (pas toujours avec la règle de D'Alembert appliquée aux séries numériques),
- connaître les développements usuels et savoir les utiliser pour obtenir un développement en série entière en 0 d'une fonction,
- maîtriser les calculs élémentaires permettant d'obtenir une expression simplifiée de la fonction somme d'une série entière.

Pas au programme de khôle cette semaine : série entière et équation différentielle

Séries Entières à coefficients réels ou complexes

- 1) Rayon de convergence d'une série entière
 - (a) Définition d'une série entière ;
 - (b) Lemme d'Abel
 - (c) Rayon de convergence défini comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
 - (d) Convergence d'une série entière :
 - ★ Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument et si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.
 - (*La règle de D'Alembert relative aux séries entières est Hors-Programme, mais on pourra se ramener à la règle de D'Alembert sur les séries numériques*)
 - ★ Le rayon de convergence est $R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, \sum |a_n|r^n \text{ converge}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$;
- (e) Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence ;

(*toute étude systématique de la convergence sur le cercle est exclue*)
 - (f) Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b :
 - ★ Si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_b \leq R_a$
 - ★ Si $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$
 - (g) Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
 - (h) Opérations algébriques : somme de deux séries entières, produit par un scalaire ;

(*La notion de série produit est Hors-Programme*)
- 2) Fonction somme d'une série entière d'une variable réelle :
 - (a) Fonction somme, domaine de définition ;
 - (b) Propriétés (Admises) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence :

continuité, dérivation, classe C^∞ et intégration terme à terme (conservation du rayon de convergence).

(*Notion de prolongement par continuité aux bornes de l'intervalle ouvert de convergence Hors-Programme*)
- 3) Développement en série entière autour de 0
 - (a) Définition d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 ;
 - (b) Unicité du développement en série entière, lien avec la série de Taylor de f au voisinage de 0 ;
 - (c) Développements usuels en série entière :

 e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\ln(1-x)$, $\text{Arctan } x$, $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

(*Les fonctions ch et sh ne sont pas au programme de TSI*)

 $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n \geq 0} z^n$
- 4) Exponentielle complexe

Expression (*Admise*), pour $z \in \mathbb{C}$, de $\exp(z)$ comme somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$