

Reprise des programmes de khôlle 1, 2, 9, 10 sur les fonctions et sur les intégrales généralisées

Un exercice rapide

Reprise des programmes de khôlle 5,6 sur les séries numériques et 13,14 sur séries entières afin de pouvoir travailler correctement les probabilités

VARIABLES ALÉATOIRES RÉELLES DISCRÈTES

1) Variable Aléatoire - Loi de Probabilité

(a) Définitions

- i. Définition d'une variable aléatoire réelle discrète définie sur un univers dénombrable.
- ii. Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète X . Notation P_X
- iii. Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète X . Notation F_X
- iv. Variables aléatoires 2 à 2 indépendantes, mutuellement indépendantes.

(b) Propriétés

- i. Croissance de F_X , $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
- ii. Obtention de la loi d'une variable aléatoire réelle discrète à partir de l'expression de sa fonction de répartition.
- iii. Image d'une variable aléatoire par une application à valeurs réelles. Propriété pour des variables aléatoires indépendantes.

2) Espérance

(a) Définition

- i. X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente.
- ii. Dans ce cas, notation $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$

(b) Propriétés

- i. Linéarité de l'espérance, propriété de positivité de l'espérance ;
- ii. Théorème de transfert : Si f application à valeurs réelles, définie sur un ensemble contenant $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, alors $f(X)$ est d'espérance finie ssi la série $\sum f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$.

3) Variance

(a) Définition

- i. Si X^2 est d'espérance finie (ie X admet un moment d'ordre 2), alors X est d'espérance finie
- ii. Dans ce cas, définition de la variance par : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.
- iii. Écart type d'une variable aléatoire.

(b) Propriétés

- i. Si X^2 est d'espérance finie, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$
- ii. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$;
- iii. $\mathbb{V}(X) = 0$ ssi X presque sûrement constante.
- iv. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*inégalité de Markov **Hors-Programme***)

4) Lois usuelles

(a) Loi géométrique de paramètre p

- i. Définition, Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- ii. Reconnaissance de situations modélisables par un loi géométrique.
- iii. Interprétation comme le rang du premier succès dans une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de paramètre p .

- iv. Espérance et variance
- (b) Loi de Poisson de paramètre λ
- i. Définition, Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$
- ii. Reconnaissance de situations modélisables par un loi de Poisson.
- iii. Espérance et variance
- iv. Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
- Cas pratique : pour $n \geq 30$, $p_n \leq 0,1$ et tels que $np_n \leq 15$:
- Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$, alors $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_n = k) \approx \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-np_n}$
- La notion de convergence en loi est **Hors-Programme***