Fonctions de plusieurs variables

On considère des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$), à valeurs dans $\mathbb{R}$. On ne soulèvera aucune difficulté liée aux ensembles de définition des fonctions considérées.
On travaillera exclusivement avec la norme euclidienne.

1) Introduction à la topologie de $\mathbb{R}^n$ ($n \leqslant 3$) : ***notions abordées, ne pas évaluer sur cette partie***
   (a) Norme euclidienne, distance euclidienne, inégalité triangulaire *(Autres normes **Hors-Programme**)*
   (b) Définition d'une boule ouverte, d'une boule fermée, d'une sphère, d'une partie bornée de $\mathbb{R}^n$
   (c) Parties ouvertes, parties fermées
   Définition d'un voisinage d'un point, d'une partie ouverte, d'une partie fermée de $\mathbb{R}^n$;
   Boules ouvertes, boules fermées, $\mathbb{R}^n$, $\varnothing$, intersection ou réunion d'ouverts (resp de fermés).
   (d) Point intérieur, extérieur, point adhérent, frontière d'une partie de $\mathbb{R}^n$ *(l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble ne sont pas au programme et les caractérisations séquentielles sont **Hors-Programme**)*
2) Applications de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, limite, continuité
   (a) Structure d'espace vectoriel de $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, de $\mathcal{B}(D, \mathbb{R})$ (ensemble des fonctions bornées sur D).
   (b) Limite en un point adhérent, continuité d'une application en un point
   Définitions, Unicité de la limite, Opérations, Prolongement des inégalités, Théorème d'encadrement.
   (c) Applications continues de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$:
   Définition, Opérations algébriques sur les applications continues, Continuité d'une composée.
   Prolongement par continuité. *(L'étude de la continuité d'une fonction de plusieurs variables n'est pas un attendu du Programme, seuls des cas simples, classiques pourront être demandés)*
   Image d'une partie fermée bornée par une application continue. *(Admis)*
3) Applications de $D \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, Dérivées partielles *(Notion d'application différentiable **Hors-Programme**)*
   (a) Dérivées partielles premières, Applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$
   Dérivées partielles premières, Applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$,
   Définitions du gradient,d'un point critique ; *Notion de différentielle en un point **Hors-Programme**, notation de différentielle* $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$ *rapidement présentée, mais non exigible*
   Opérations Algébriques, Composée, Développement limité d'ordre 1 ;
   Dérivée première de $t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$, de $t \mapsto f\big(x(t), y(t), z(t)\big)$
   Dérivées partielles d'ordre 1 de $(u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$, de $(u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$
   (b) Applications de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$
   Définition, Opération, La composée d'applications de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$;
   Théorème de Schwarz pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 2$) sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. *(Admis)*
4) Équations aux dérivées partielles
   Exemples de résolution d'équations aux dérivées partielles premières et secondes faisant appel à des **changements de variables affines** ou au **passage en coordonnées polaires (les seuls au programme)**.
   (les changements de variable seront précisés dans l'énoncé)
   (Par ex : équation de transport, équation de la diffusion thermique, équation de propagation)
5) Extrémum local d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^2$, à valeurs réelles
   Condition nécessaire pour l'existence d'un extrémum local en un point d'une fonction f définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$: être un point critique pour f ;
   *Formule de Taylor-Young d'ordre 2 et CNS pour l'existence d'un extrémum, Hessienne **Hors-Programme***
   Exemples de recherche d'extrémums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
6) Applications géométriques :
   (a) Courbe du plan définie par $f(x, y) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$
   Définition d'un point régulier ; cas particulier du graphe d'une fonction ;
   Tangente et normale à la courbe en un point régulier, en admettant l'existence un paramétrage local $\mathcal{C}^1$, lien avec la tangente à un arc paramétré.
   (b) Lignes de niveau et gradient
   (c) Surface définie par $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$
   Définition d'un point régulier, plan tangent en un point régulier ;
   Cas particulier des surfaces d'équation $z = f(x, y)$:
   Plan tangent, position relative locale entre la surface d'équation $z = f(x, y)$ et son plan tangent.

Merci pour tout le travail effectué au cours de cette année.

