

NOTIONS AU PROGRAMME

Fonctions : Révision du programme d'analyse de première année

(la majeure partie des exercices d'écrits et d'oraux de TSI portent sur les fonctions à valeurs réelles et non vectorielles)

- ★ Limite, continuité, dérivabilité, prolongements continus, prolongements de classe $\mathcal{C}^1$ (ou plus)
- ★ Théorèmes classiques (Valeurs intermédiaires, Rolle, Accroissements finis, Formule de Leibniz ...)
- ★ Formule de Taylor-Young, Développement Limités, ...
- ★ Étude de fonctions,
- ...

Fonctions d'une variable réelle à valeurs vectorielles

- 1) Fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3), continuité
 - (a) Fonctions coordonnées, Caractérisation de la limite à l'aide des fonctions coordonnées ;
 - (b) Opérations algébriques ; structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, fonction bornée ;
 - (c) Limites, opérations sur les limites ;
 - (d) Continuité, Caractérisation de la continuité à l'aide des fonctions coordonnées.
- 2) Dérivation de fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ($p = 2$ ou 3)
 - (a) Dérivabilité en un point : dérivée, dérivée à gauche, à droite, Caractérisation à l'aide des fonctions coordonnées ; Interprétation géométrique et cinématique.
 - (b) Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée, dérivable en $a \Rightarrow$ continue en a ;
 - (c) Dérivée d'une somme de deux fonctions vectorielles, du produit d'une fonction à valeurs réelles et d'une fonction à valeurs vectorielles (+formule de Leibniz pour l'obtention des dérivées successives de fonctions du type $t \mapsto \lambda(t)V(t)$) ;
 - (d) Dérivées successives, applications de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I , espaces vectoriels $\mathcal{D}^k(I, \mathbb{R}^p)$ et $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^p)$ pour $k \in \mathbb{N}$, ou $k = \infty$;
 - (e) Formule de Taylor-Young, développements limités.
 - (f) Pour $p = 2$ ou 3 et $\mathbb{R}^p$ euclidien (orienté), dérivation d'un produit scalaire, d'une norme, d'un déterminant et d'un produit vectoriel. (+formule de Leibniz pour l'obtention des dérivées successives)

QUESTION DE COURS sur 5 points :

Chaque étudiant traite une des questions de cours suivantes

- 1) Dérivée de la composée de deux fonctions(2pts) (*attention aux hypothèses pour la validité de la composition*) + Retrouver le développement limité à l'ordre $2n + 1$ en 0 de $\arctan$ à l'aide du théorème d'intégration des développements limités(3pts)
- 2) Égalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + dérivée du produit scalaire de deux fonctions réelles à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (2,5pts)
- 3) Théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + Propriétés de la fonction Arccos (domaine, monotonie, dérivabilité, dérivée)(2,5pts)
- 4) Formule de Taylor-Young pour une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ (2,5pts) + dérivée de $J : x \mapsto \|f(x)\| = \sqrt{\langle f(x)|f(x) \rangle}$ (2,5pts) (*attention aux hypothèses*)
- 5) Théorème de la bijection continue pour les fonctions à valeurs réelles(2,5pts) + Propriétés de la fonction Arcsin (domaine, monotonie, dérivabilité, dérivée)(2,5pts)