

Travaux dirigés Signaux n°4. Oscillateur harmonique

Exercices d'application directe

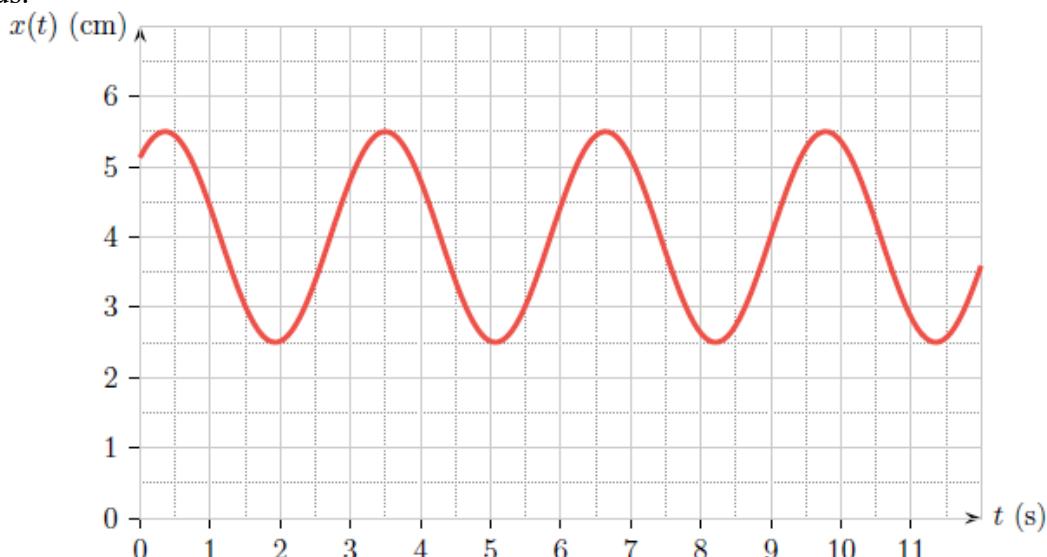
Exercice 1 : Mesure de masse en apesanteur

En apesanteur, les dispositifs usuels de mesure de masse ne sont pas fonctionnels suite à l'absence de gravité. Il est possible d'utiliser un système original, constitué d'une chaise attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est liée à un point fixe du vaisseau. La constante de raideur du ressort est $k = 606 \text{ N.m}^{-1}$

1. Rappeler l'expression de la période propre d'un système masse-ressort en fonction de k et m .
2. Quand la capsule est arrimée dans sa base de lancement, la chaise vide oscille avec la période $T = 1,28 \text{ s}$. Calculer la masse m_0 de la chaise.
3. Quand la capsule est en orbite autour de la Terre, l'astronaute s'assoit sur la chaise et mesure la période $T' = 2,33 \text{ s}$. Quelle est la masse m de l'astronaute ?

Exercice 2 : Caractéristiques d'un oscillateur

1. Déterminer l'amplitude, la période, la fréquence et la valeur moyenne du signal représenté ci-dessous.



2. Il s'agit en fait de la longueur $x(t) = l(t)$ d'un ressort de constante de raideur k , relié à un point M de masse $m = 20 \text{ kg}$. La masse se déplace horizontalement.
 - a. Déterminer graphiquement la valeur de la position d'équilibre x_{eq} .
 - b. Déterminer graphiquement la valeur maximale de la vitesse du mobile.
 - c. Estimer la valeur de la constante de raideur k .

Exercice 3 : Exemples d'oscillateurs

1. On considère un système masse-ressort vertical dans le champ de pesanteur : une masse m est suspendue à un ressort idéal (masse négligeable, longueur à vide l_0 , raideur k), accroché au point fixe O. L'équation donnant l'évolution de l'altitude $z(t)$ de la masse par rapport à l'altitude du point O pris comme référence s'écrit : $m\ddot{z} = -k(z - l_0) + mg$ où g est l'accélération de la pesanteur.
 - a. Mettre cette équation sous forme canonique.
 - b. En déduire l'expression de la période des oscillations de la masse ainsi que sa position d'équilibre.

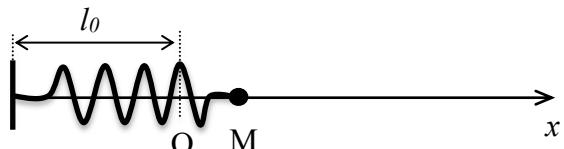
2. On considère un pendule pesant : une barre homogène de masse m , de longueur $2L$ est accrochée en une de ses extrémités à un point fixe O. Si la liaison en O est parfaite, l'équation donnant l'évolution de l'angle θ que fait la direction de la barre avec la verticale s'écrit alors :

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} = -mgL \sin(\theta)$$

- Cette équation est-elle du type oscillateur harmonique ?
- Comment est-elle modifiée si l'on considère que les oscillations du pendule sont limitées aux petits angles ?
- En déduire, dans ce dernier cas, l'expression de la période des oscillations ainsi que la position d'équilibre.

Exercice 4 : Oscillations harmoniques

Un point matériel M de masse m est astreint à se déplacer **sans frottement** sur une tige, le long de l'axe (Ox) horizontal. Il est lié à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , l'autre extrémité étant fixe.

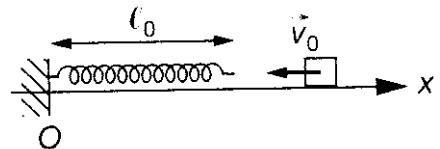


On note \vec{u}_x le vecteur unitaire de l'axe Ox tel que $\vec{OM} = x(t)\vec{u}_x$. A l'équilibre, le solide occupe la position O d'abscisse $x = 0$.

- Etablir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ et définir la pulsation propre de ce système.
- A l'instant $t = 0$, on écarte M du point O d'une distance X_0 et on le lâche sans vitesse initiale. Donner l'évolution exacte de sa position $x(t)$.
- Entre quelles abscisses extrémiales évolue la masse ?
- Quelle est la période du mouvement ?
- Tracer la variation de cette fonction au cours du temps en indiquant les points remarquables.

Exercice 5 : Amplitude des oscillations d'une masse*

Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 fixé en O est initialement détendu. Une masse m de vitesse $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ arrive de la droite et s'accroche au ressort. Le mobile est décrit par son abscisse $x(t)$.



On s'intéresse au système {masse}.

- Effectuer un bilan des forces puis établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ à l'aide du PFD.
- Résoudre l'équation à l'aide des conditions initiales. En déduire l'amplitude des oscillations.

Pour aller plus loin

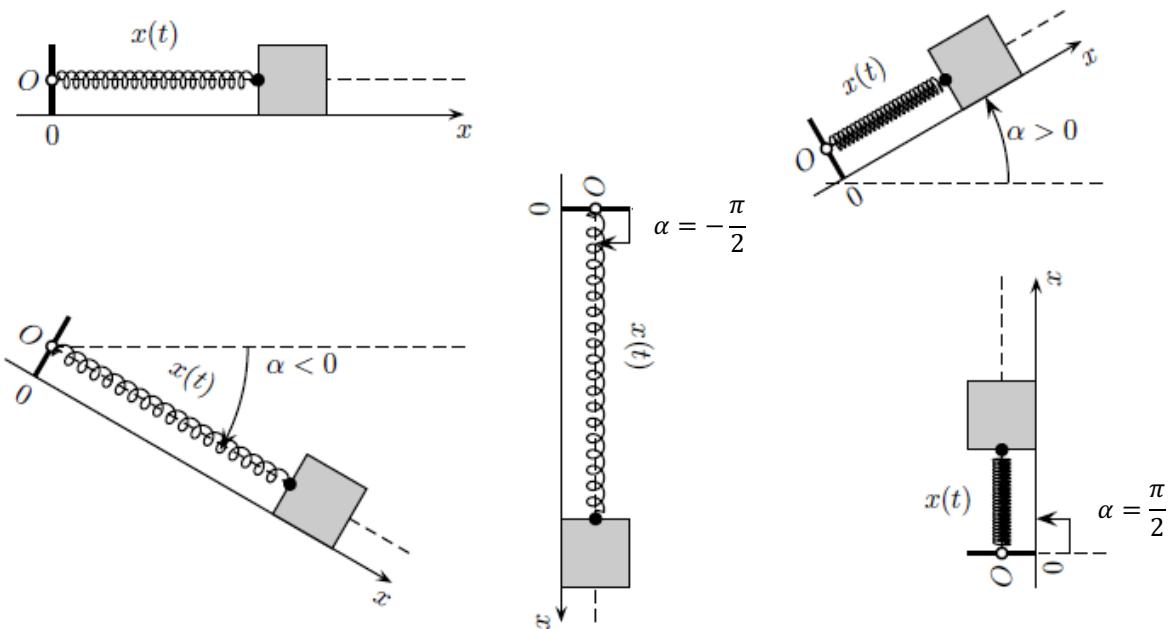
Exercice 6 : Positions d'équilibre

On étudie le système {point M de masse m } lié à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On considère le ressort comme idéal et on néglige tout frottement. Le point est repéré par son abscisse x .

- Rappeler l'expression de la longueur à l'équilibre d'un ressort dans le cas où l'axe Ox est horizontal ou vertical.
- Dans le cas où l'axe Ox fait un angle α avec l'horizontale, déterminer par homogénéité et cohérence l'expression de x_{eq} en fonction de m, g, k, l_0 et α parmi les propositions suivantes :

$$x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \cos(\alpha) ; x_{eq} = l_0 + \frac{k}{mg} \cos(\alpha) ; x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \sin(\alpha) \text{ ou } x_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} \sin(\alpha).$$

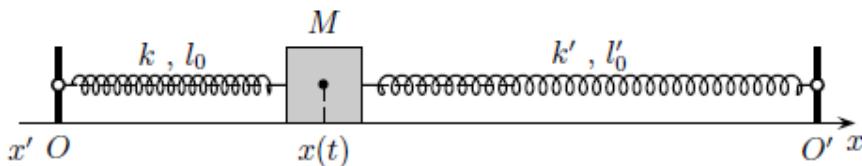
On pourra s'aider des situations ci-après.



3. Vérifier la cohérence de votre résultat avec les deux cas de la question 1.

Exercice 7 : Masse reliée à deux ressorts***

Une masse quasiment ponctuelle m positionnée en M est reliée à deux ressorts fixés en O et O' . Elle glisse sans frottement sur le sol horizontal.



La position de la masse est repérée par son abscisse $x(t)$ (comptée à partir de O). Les ressorts ont pour raideurs respectives k et k' et comme longueur à vide l_0 et l'_0 . La longueur OO' est notée L .

1. Effectuer un bilan des forces sur la masse.
2. Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse à l'aide du PFD.
3. Quelle est la position d'équilibre x_{eq} et la pulsation propre du système ?
4. Sans résoudre l'équation différentielle, décrire le mouvement de la masse.
5. Résoudre l'équation précédente en considérant qu'initialement $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$.

Capacités exigibles :

- Etablir et reconnaître l'équation différentielle canonique d'un oscillateur harmonique.
- Etablir l'expression de la pulsation propre des oscillations.
- Exprimer sa solution compte tenu des conditions initiales.
- Caractériser le mouvement en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- Déterminer, en s'appuyant sur une analyse dimensionnelle, la position d'équilibre et le mouvement d'une masse fixée à un ressort vertical.
- Réaliser le bilan énergétique du circuit LC.