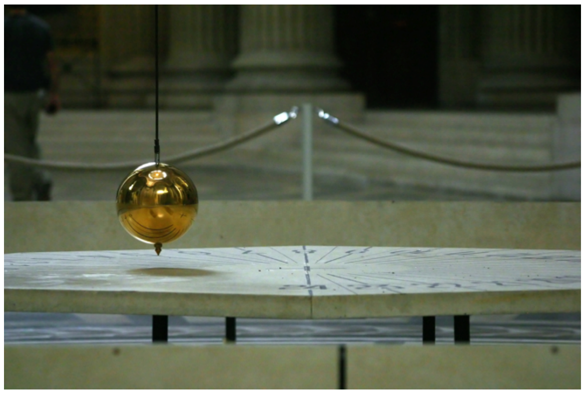
Travaux dirigés Signaux n°5. Oscillations amorties

Exercices d'application directe du cours.

Exercice 1 : Pendule de Foucault



Afin de démontrer la rotation de la Terre sur elle-même, l'astronome Léon Foucault a réalisé une expérience historique sous la coupole du Panthéon à Paris.
Il y accroche un pendule de longueur $L = 67$ m constitué d'une boule de plomb de masse $m = 28$ kg et de rayon $R = 9$ cm. La période des oscillations obtenue est de 16,5 s. Le pendule s'amorti en 6 h environ.

1. **Caractéristiques du pendule :**

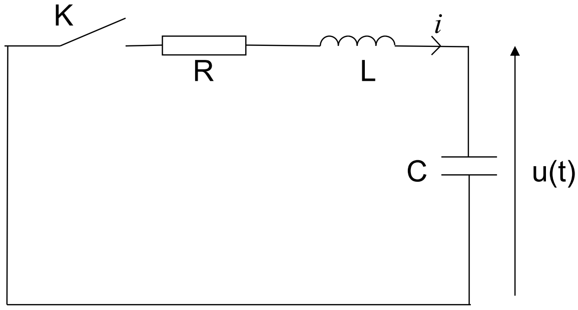
L'angle θ entre le pendule et la verticale est régi par l'équation différentielle :

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta}(t) + \frac{g}{L}\theta(t) = 0$$

où $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$ est l'accélération de la pesanteur et α le coefficient de frottement fluide.
Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité associé à cet oscillateur en fonction de α, m, g et L.

2. **Confrontation modèle et expérience :**
   a. Calculer la valeur de la période propre de cet oscillateur. Comparer avec les observations.
   b. Estimer la valeur du facteur de qualité Q à l'aide des données.
   c. En déduire une estimation du coefficient de frottement fluide α.
   d. Le modèle de Stockes prévoit qu'une boule évoluant dans l'air subit un frottement de coefficient : $\alpha = 6\pi\eta R$ où $\eta = 1{,}8.10^{-5}$ Ps est la viscosité de l'air. Comparer avec la valeur trouvée précédemment. A quel(s) phénomène(s) sont dus les frottements ?

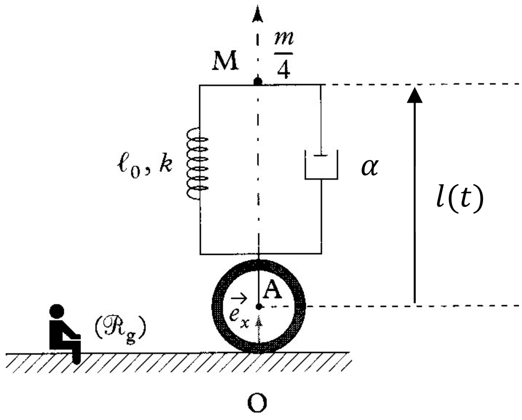
Exercice 2 : Régimes d'évolution …



Un condensateur de capacité $C = 10\ \mu$F, initialement chargé sous une tension $U_0 = 5$ V est connecté, en série, à l'instant $t = 0$ à une bobine d'inductance $L = 25$ mH en série avec une résistance R.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Mettre cette équation sous forme canonique et en déduire l'expression du facteur de qualité Q et de la pulsation propre.
3. On souhaite que le circuit évolue en régime critique.
   a. Déterminer l'expression puis la valeur numérique de R.
   b. Représenter qualitativement l'allure de $u(t)$.
4. On choisit $R = 20\ \Omega$.
   a. Quel est le régime d'évolution du circuit ?
   b. Représenter qualitativement l'allure de $u(t)$.
5. Déterminer l'expression de l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R.

Exercice 3 : Amortisseur de voiture.



On modélise l'amortisseur d'une roue de voiture à l'aide d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0, en parallèle avec un amortisseur de coefficient de frottement α.

Une masse $m' = \frac{m}{4}$ est posée sur ce dispositif et peut se déplacer verticalement le long de l'axe $(O, \vec{e}_x)$.

Donnée : $m = 1200$ kg.

On rappelle (cf chapitre S4) que la longueur à l'équilibre de la suspension peut s'écrire :

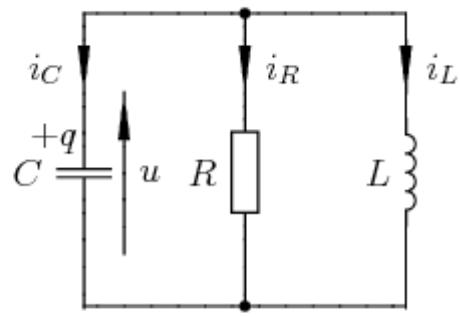
$$l_{eq} = l_0 - \frac{m'g}{k}$$

Lors du changement d'une roue, on soulève d'une hauteur $h = 25$ cm la masse m', ce qui correspond au moment où la roue (de masse négligeable) ne touche plus le sol : AM vaut alors 40 cm.

1. A l'aide des données, déterminer la valeur numérique de l_0, de l_{eq} puis de k.
2. Rappeler l'expression du facteur de qualité Q de ce système ainsi que de la pulsation propre ω_0.
3. Déterminer et calculer α afin que le dispositif fonctionne en régime critique (roue sur le sol à l'arrêt et masse m' en mouvement vertical).
4. On enfonce la masse m' d'une hauteur $d = 5$ cm par rapport à sa position d'équilibre et on lâche le système à $t = 0$ sans vitesse initiale. Tracer l'allure de la position de M au cours du temps.
5. On charge maintenant l'amortisseur au maximum : la masse totale du véhicule vaut $m = 2200$ kg. Déterminer les nouveaux paramètres de l'amortisseur Q et ω_0. Quel est le régime d'évolution ? Tracer la nouvelle allure de la position lorsqu'on enfonce de $d = 5$ cm la nouvelle masse m' et qu'on la lâche sans vitesse initiale à $t = 0$.

Exercices d'approfondissement

Exercice 4 : Circuit RLC parallèle



Soit le circuit représenté ci-contre.

1. Montrer que $i_L(t)$ vérifie l'équation :

$$\frac{d^2 i_L(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_L(t)}{dt} + \omega_0^2 i_L(t) = 0$$

Donner l'expression de ω_0 et de Q en fonction de R, L et C

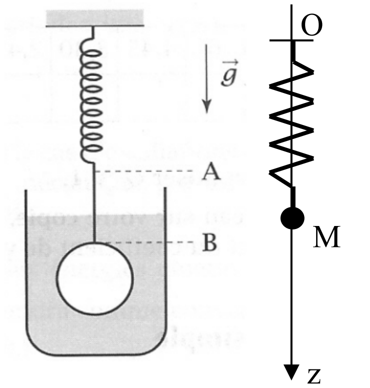
On se place dans le cas $Q \gg 1$.

2. Que devient l'équation différentielle avec cette hypothèse ? A quel circuit électrique cela correspond-il ?

On suppose que C est initialement chargé sous une tension U_0 :

3. Déterminer, en justifiant soigneusement, les conditions initiales $i_L(0)$ et $\frac{di_L}{dt}(0)$.
4. En déduire l'expression approchée de $i_L(t)$ si $Q \gg 1$.
5. Toujours dans le cas $Q \gg 1$, exprimer les diverses énergies emmagasinées en fonction du temps ainsi que l'énergie totale présente dans la bobine et le condensateur. Commenter.

Exercice 5 : Mesure d'un coefficient de viscosité*



Une sphère de rayon R est animée d'une vitesse $\vec{v}$, plongée dans un liquide de viscosité η, est soumise à une force de frottement qui, lorsque la vitesse est faible (régime laminaire), a pour expression : $\overrightarrow{F_S} = -6\pi\eta R\vec{v}$.
Elle est accrochée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0.

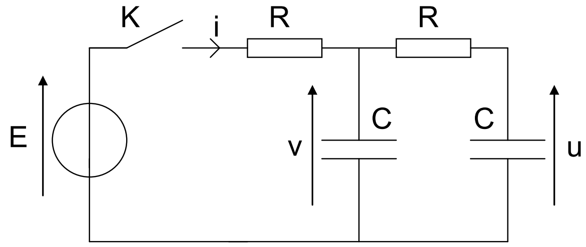
1. Effectuer un bilan des forces appliquées à la sphère.
2. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que la position $z(t)$ du centre de la bille vérifie l'équation :

$$\ddot{z}(t) + 2\alpha\dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = \omega_0^2 z_{eq} \text{ où } 2\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m}$$

On précisera les expressions de ω_0 et z_{eq}.

3. On suppose que le régime est pseudo-périodique. Exprimer la relation liant la pseudo pulsation ω, la pulsation propre ω_0 et α.
4. En déduire une méthode expérimentale permettant de déterminer la viscosité d'un liquide.

Exercice 6 : Circuit avec deux condensateurs*



Le circuit schématisé ci-après comporte deux résistances R et deux condensateurs de capacité C, initialement déchargés.

A l'instant $t = 0$ on le branche sur un générateur de tension E.

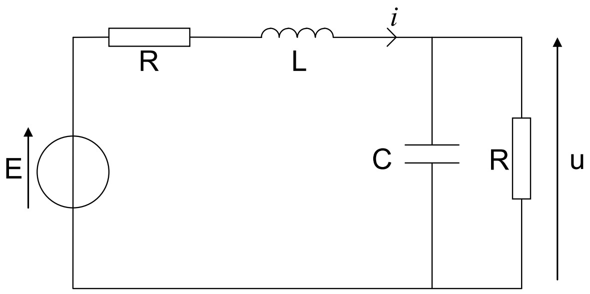
1. Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ en régime permanent.
2. On pose $\tau = RC$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ s'écrit :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \frac{3}{\tau}\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau^2}u(t) = \frac{E}{\tau^2}$$

3. Quel est le facteur de qualité Q du montage ? Quel est le régime d'évolution de cet oscillateur ?
4. Après avoir déterminé les conditions initiales, en déduire l'allure de la représentation de $u(t)$.

Exercice 7 : Décrément logarithmique**

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension E dans le circuit ci-dessous.



1. Déterminer la valeur $u(\infty)$ vers laquelle tend $u(t)$ en régime permanent.

2. Démontrer que l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 2\lambda\frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \omega_0^2 u_\infty$$

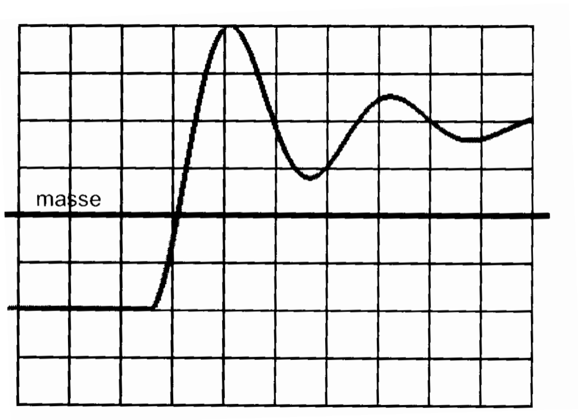
Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, R et C.

3. On observe sur un oscilloscope la courbe $u(t)$ qui suit.
   Échelle verticale : 1V/div et échelle horizontale 200 µs/div.

   a. Déterminer graphiquement la valeur numérique de la pseudo-période T ainsi que la tension $u(\infty)$.
   b. Déterminer numériquement la valeur du décrément logarithmique défini par la formule :

   $$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u(\infty)}{u(t + nT) - u(\infty)}\right)$$

   où n est un entier naturel quelconque.
   c. Le calcul permet de montrer que $\delta = \lambda T$. En déduire la valeur numérique de λ.
   d. Sachant que $R = 200\ \Omega$ et $L = 100$ mH, déterminer la valeur numérique de C.



Capacités exigibles :

- Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques
- Écrire sous forme canonique l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti. (Savoir retrouver rapidement l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité à partir d'une équation différentielle)
- Décrire la nature de la réponse (trois types de régimes libres) en fonction du facteur de qualité.
- Établir l'expression de la réponse dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon.
- Savoir esquisser l'allure des courbes en fonction du temps et du facteur de qualité.
- Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.
- Connaître les significations physiques de la pulsation propre, du facteur de qualité et du temps de relaxation.
- Réaliser le bilan énergétique du circuit RLC série.

QCM d'entraînement :