

Travaux dirigés de Mécanique n°2

Mouvement dans le champ de pesanteur.

Exercice 1 : Une histoire de gravitation

1. Rappeler l'expression de la force d'interaction gravitationnelle s'exerçant entre deux corps de masses m_A et m_B .

On donne les valeurs suivantes :

| | | |
|-----------------|---|--|
| Pour la Terre : | Masse : $M_T \approx 5,98 \cdot 10^{24}$ kg | Rayon : $R_T \approx 6,38 \cdot 10^3$ km |
| Pour la Lune : | Masse : $M_L \approx 7,5 \cdot 10^{22}$ kg | Rayon : $R_L \approx 1,74 \cdot 10^3$ km |
| Pour Vénus : | Masse : $M_V \approx 4,87 \cdot 10^{24}$ kg | Rayon : $R_V \approx 6,05 \cdot 10^3$ km |
| Pour Mars : | Masse : $M_M \approx 6,42 \cdot 10^{23}$ kg | Rayon : $R_M \approx 3,39 \cdot 10^3$ km |

2. Estimer la valeur de l'accélération de la pesanteur g à la surface de la Terre, de Mars, de Vénus et de la Lune. Commenter. (Donnée : Constante universelle de gravitation $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$)

Exercice 2 : Cliff diving (Résolution de pb)

Le 17 mai 2015, La Rochelle accueillait les championnats du monde de plongée. Les plongeurs se sont élancés depuis la Tour Saint Nicolas (voir photo ci-contre).

1. En précisant les hypothèses et les valeurs numériques utilisées, estimer la durée du plongeon ainsi que la vitesse du plongeur lors de son entrée dans l'eau.
2. Comparer le résultat obtenu avec la vidéo suivante :



<https://www.lequipe.fr/Adrenaline/Tous-sports/Actualites/Gary-hunt-remporte-le-red-bull-cliff-diving-de-la-rochelle/658592>

Proposer, si nécessaire, des améliorations à votre modèle.



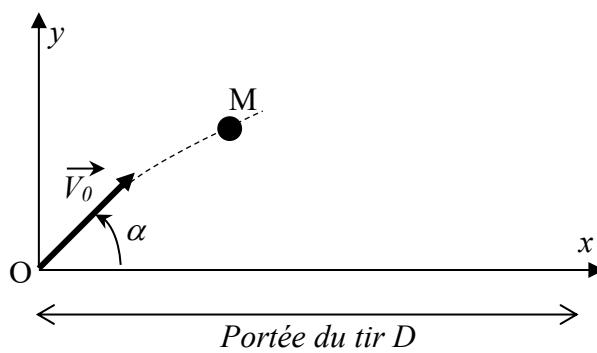
Exercice 3 : Rocket man

Les hommes (ou femme) canon, réalisent des cascades impressionnantes. Après s'être introduits dans des canons géants, ces derniers sont propulsés pour effectuer un vol de plusieurs dizaines de mètres de portée.

On suppose pour cette partie, que l'homme canon est un point matériel M de masse m . Tous les frottements sont négligés. Il est propulsé depuis l'origine O avec une vitesse initiale \vec{V}_0 formant un angle $\alpha = 45^\circ$ avec l'horizontale. (Schéma ci-dessous). L'origine des temps correspond au départ de l'homme canon.

Vol du cascadeur :

1. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, déterminer les équations horaires du mouvement : $\{x(t), y(t), z(t)\}$ en fonction de g, V_0, α et t .
2. Établir l'équation de la trajectoire.
3. Déterminer en fonction de V_0, g et α , la distance D à laquelle le cascadeur finira par toucher le sol.

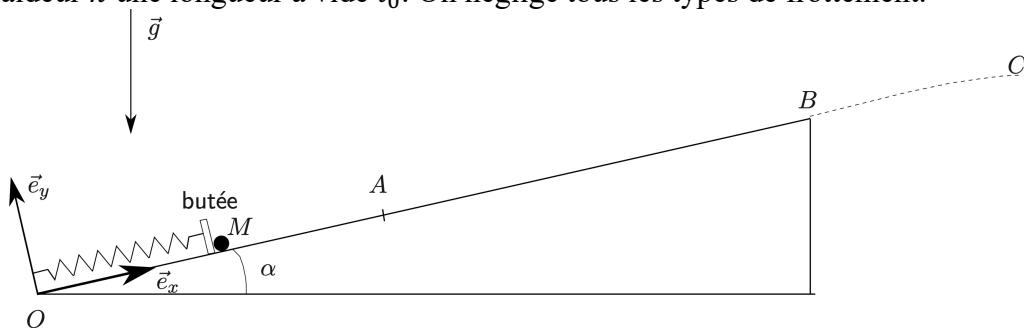


Le plus récent record du monde a été établi à Milan en 2011 par David « Bullet » Smith Jr. La portée du saut était de **59,05 m**.

4. Calculer la vitesse initiale du cascadeur nécessaire à la réalisation de cet exploit. ($g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$)
5. Déterminer numériquement le temps de vol du cascadeur.
6. Calculer la hauteur maximale atteinte par le cascadeur lors de ce record.

Propulsion du cascadeur :

Le canon utilisé n'est que « poudre aux yeux ». Le cascadeur est en réalité propulsé grâce à une plateforme montée sur des ressorts. Une fois comprimés, ceux-ci sont brusquement détendus pour accélérer le cascadeur. On modélise le mécanisme par le système représenté ci-dessous. On considère que le ressort possède une raideur k une longueur à vide l_0 . On néglige tous les types de frottement.



7. En utilisant le PFD, déterminer l'expression de l'accélération subie par le cascadeur à un instant t en fonction de m, g, k, α, l et l_0 .
8. A l'état initial, le ressort dont la raideur est estimée à $k \approx 2000 \text{ N.m}^{-1}$ est comprimé d'une valeur $\Delta L = 5 \text{ m}$ par rapport à sa longueur à vide. Calculer l'accélération initiale pour $\alpha = 45^\circ$ et $m \approx 70 \text{ kg}$. Commenter.

Mouvements de rotation (exemples classiques du cours)

Exercice 4 : Satellite circulaire.

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre, R_T le rayon de la Terre). On note M_T la masse de la Terre.

1. Représenter un schéma, la base d'étude, et effectuer le bilan des forces.
2. A l'aide du PFD, déterminer l'expression de la vitesse v_0 du satellite en fonction de G, M_T, R_T et h .
3. En déduire la période T du mouvement, et montrer que le rapport T^2/r_0^3 a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?
4. La station spatiale internationale orbite à une altitude $h = 408 \text{ km}$. Calculer numériquement la vitesse ainsi que la période de révolution de la station spatiale internationale.
5. Un satellite est dit géostationnaire s'il reste constamment au-dessus d'un point fixe de la Terre. Quelle est sa période ? En déduire son altitude h et commenter.

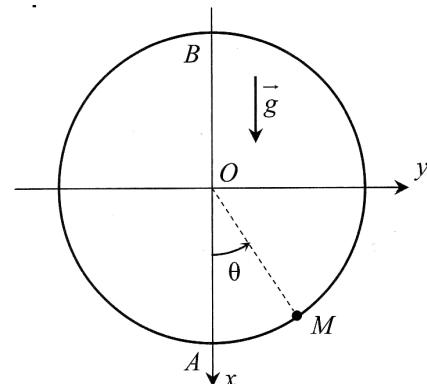
Données : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $M_T \approx 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $R_T \approx 6,38 \cdot 10^3 \text{ km}$

Exercice 5 : Mouvement sur un cerceau*.

Un anneau de masse m , assimilable à un point matériel M , peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon R fixé au sol.

- Écrire le principe fondamental de la dynamique pour l'anneau.
- Projeter l'expression précédente sur la base choisie.
- En déduire l'expression de la période T_0 des petites oscillations. (On supposera $\sin \theta \approx \theta$). Calculer T_0 pour $R = 50$ cm.
- Initialement, l'anneau est situé au point A avec une vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale vers la droite. Déterminer l'expression de l'angle $\theta(t)$ au cours du temps.

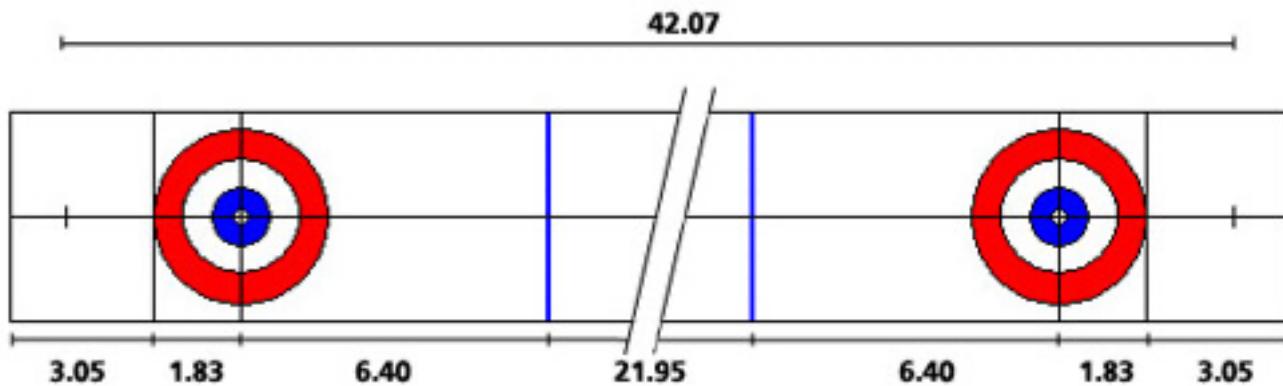
Exercices d'approfondissement



Exercice 6 : Une partie de curling*

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec de lourdes pierres en granite poli ($m = 19,96$ kg). Il est aussi appelé « pétanque de glace ».

Le but est de placer la pierre le plus près possible d'une cible dessinée sur la glace, appelée maison. L'équipe marque un point lorsque la pierre est arrivée dans la maison. Le schéma de la piste est représenté ci-dessous.



Piste de Curling vue du dessus

On suppose que la trajectoire de la pierre est rectiligne d'axe Ox.

On considère que la pierre subit un frottement solide. On note \vec{T} et \vec{N} les composantes tangentielle et normale de la force de contact exercée par la glace, et f le coefficient de frottement solide tel que $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$ lors du glissement. La vitesse initiale de la pierre, dirigée suivant l'axe Ox est $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$.

- Schématiser la situation et représenter les différentes forces appliquées à M.
- Déterminer l'expression des forces de contact $N = \|\vec{N}\|$ et $T = \|\vec{T}\|$ en fonction de f , m et g .
- A l'aide du PFD déterminer l'expression de l'accélération, de la vitesse et de la position de la pierre au cours du temps en fonction de f , g , V_0 et t .
- Quelle est la distance parcourue par la pierre jusqu'à son arrêt ?
- La distance entre le point de tir et le centre de la maison est $L = 38,41$ m. Calculer la valeur de la vitesse initiale V_0 que le lanceur doit communiquer à la pierre pour qu'elle s'arrête pile au centre de la maison. On prendra $g = 10$ m. s⁻² et $f = 0,02$.
- Seules les pierres (de diamètre $d = 30,48$ cm) dont au moins une portion se trouve à l'intérieur de la maison (cercle de 1,83 m de rayon) permettent de marquer un point. En déduire les valeurs possibles de la vitesse V_0 pour qu'un point soit marqué.
- Si le lanceur ne communique pas la bonne vitesse, deux autres joueurs peuvent augmenter la distance parcourue par la pierre en frottant vigoureusement la piste avec un balai. Donner sans calcul une interprétation de ce phénomène. Pourquoi la pierre va-t-elle plus loin ?

Exercice 7 : Temps de transit de gouttes d'eau dans l'atmosphère**

Une goutte d'eau sphérique de rayon a , indéformable et de masse volumique ρ , tombe dans le champ de pesanteur uniforme suivant un axe vertical Oz dirigé vers le bas.

L'atmosphère exerce sur la goutte une force dite de traînée, opposée à la vitesse, et qui s'exprime par la relation :

$$\vec{F} = -\frac{6\pi\eta a}{1 + l/a} \vec{v}$$

On négligera la poussée d'Archimète de l'air.

- Effectuer le bilan des forces et établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse \vec{v} de la goutte.
- Montrer que la vitesse de la bille tend vers une valeur limite v_{lim} . Donner son expression en fonction de ρ , g , a , l et η . Donner l'expression de la constante de temps τ du mouvement ?
- On donne : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, $l = 0,07 \mu\text{m}$ et $\eta = 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-2}$. Calculer v_{lim} et τ pour $a = a_1 = 0,01 \text{ mm}$ et $a = a_2 = 0,1 \text{ mm}$. Conclure sur la nature du mouvement de la goutte lors de sa chute.
- L'atmosphère est modélisée par une couche uniforme de hauteur 8 km. En utilisant les résultats précédents, calculer le temps de transit de gouttes d'eau partant du haut de l'atmosphère et de rayons respectifs a_1 et a_2 .

Capacités exigibles :

Forces :

- Utiliser les forces usuelles :** poids, interaction gravitationnelle, réaction du support, force de rappel élastique, tension d'un fil, force de frottement fluide
- Etablir un bilan des forces et en rendre compte sur une figure

Les trois lois de Newton.

- Définir le mouvement relatif d'un référentiel galiléen par rapport à un autre référentiel galiléen.
- Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un solide à l'aide du principe fondamental de la dynamique.
- Loi des actions réciproques

Mouvements particuliers :

- Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme : Établir l'équation du mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à vecteur accélération constant.
- Mouvement avec frottement :
 - Analyser les équations différentielles en terme d'ordre de grandeur, déterminer la vitesse limite.
 - Utiliser les résultats obtenus par simulation numérique
- Pendule simple : Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
- Mouvement des satellites et des planètes :
 - Établir l'expression de la vitesse et de la période de révolution dans le cas d'une orbite circulaire.
 - Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas d'un

QCM d'entraînement :

