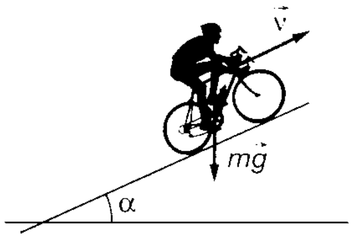
Travaux dirigés de Mécanique n°3

Application directe du cours

Exercice 1 : Puissance d'une force



Un cycliste, de masse $m = 100\,\mathrm{kg}$ avec bicyclette incluse, effectue l'ascension du Mont Ventoux. Il roule à la vitesse constante $v = 10{,}5\ \mathrm{km.h^{-1}}$ sur une pente inclinée de 7 % (C'est-à-dire : $\tan\alpha = \frac{7}{100}$)

1. Déterminer l'expression de la puissance $P(\vec{P})$ du poids en fonction de m, g, v et α ?
2. Effectuer l'application numérique.
3. Un cycliste peut-il, grâce à un vélo et une génératrice, recharger un téléphone portable ? un ordinateur ? faire fonctionner un grille-pain ?
   (Eléments de réponse dans la vidéo à regarder via le QR code)

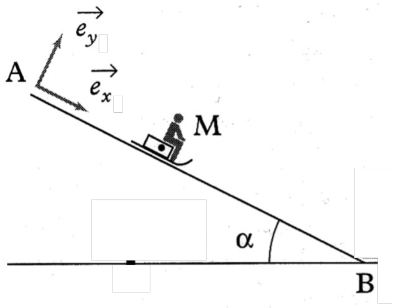
Application des théorèmes énergétiques

Exercice 2 : Tir vertical

Un objet est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initiale $V_0 = 10\ \mathrm{m.s^{-1}}$. Quelle altitude maximale H va-t-il atteindre ? On utilisera le théorème de l'énergie cinétique on négligera les frottements.

<u>Application :</u> Déterminer la vitesse initiale que vous êtes capable de générer lors d'un saut à la verticale sans élan.

Exercice 3 : Les TSI font du Ski



Un étudiant de TSI, assimilé à un point matériel *M* de masse *m*, descend une piste de ski faisant un angle α avec l'horizontale. Il est initialement situé immobile en A puis glisse jusqu'en B sur une distance *L*.

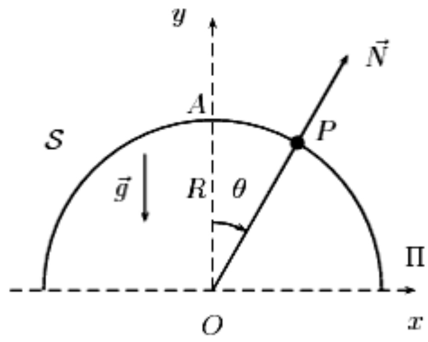
Le skieur de masse m est évidemment soumis à son poids mais également aux frottements solides.
On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force exercée par la piste, et f le coefficient de frottement solide tel que $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On note (Ox) l'axe parallèle au plan incliné et (Oy) l'axe perpendiculaire au plan.

Pour les applications numériques, on choisira : $\alpha = 25°$ (piste bleue), $L = 50$ m et $f = 0{,}10$.

1. En appliquant le PFD, déterminer l'expression de $N = \|\vec{N}\|$. En déduire celle de $T = \|\vec{T}\|$
2. Déterminer le travail entre A et B de $\vec{P}$, $\vec{N}$ et $\vec{T}$ en fonction de m, g, f, L et α.
3. A l'aide d'un théorème énergétique, déterminer l'expression de la vitesse du skieur au point B. (on suppose que sa vitesse initiale en A est nulle).
4. Effectuer l'application numérique.

Exercice 4 : Happy feet

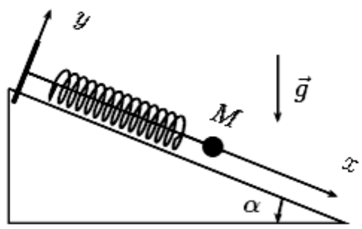


Un pingouin P assimilable à un point matériel de masse m est abandonné sans vitesse initiale en équilibre instable au sommet A d'un igloo (demi-sphère S de rayon R et de centre O) posée sur la banquise (plan Π). Le contact entre S et P est supposé sans frottement.
A la suite d'un déséquilibre infinitésimal, le pingouin P se met en mouvement en restant dans le plan vertical Oxy. On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, P reste constamment en contact avec S. Sa position est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$.

1. Déterminer la vitesse du pingouin P en fonction de θ, g et R.
2. Exprimer la réaction du support $\vec{N}$ dans la base d'étude en fonction de θ, g et m.
3. En déduire la valeur θ_0 de θ pour laquelle le pingouin P n'est plus en contact avec l'igloo (phase (2) du mouvement de P) ainsi que l'expression de la vitesse v_0 de P en ce point.
4. Décrire l'allure de la trajectoire ultérieure du pingouin P.

Mouvement conservatif

Exercice 5 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

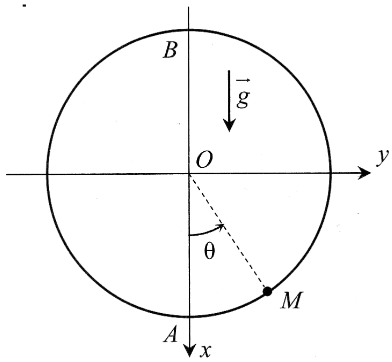


On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k, dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m. On suppose qu'il n'existe pas de frottement de glissement sur le plan incliné. Soit un axe Ox colinéaire au plan incliné (voir figure).
On choisira O comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur.

On donne $m = 0{,}2$ kg ; $l_0 = 30$ cm ; $k = 10\ \mathrm{N.m^{-1}}$; $g = 10\ \mathrm{m.s^{-2}}$ et $\alpha = 30°$.

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle totale E_p de M en fonction des données et de x puis représenter la courbe de E_p en fonction de x.
2. En déduire l'expression de la position d'équilibre x_{eq} de M.
3. Montrer que l'énergie mécanique de M est constante.
4. On lâche M depuis l'abscisse $x = 20$ cm avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ où $v_0 = 1{,}0\ \mathrm{m.s^{-1}}$.
   En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déterminer l'amplitude du mouvement de M ?
5. A l'aide d'un théorème énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement de M. En déduire la période des oscillations.

Exercice 6 : Equilibre et mouvement sur un cercle.

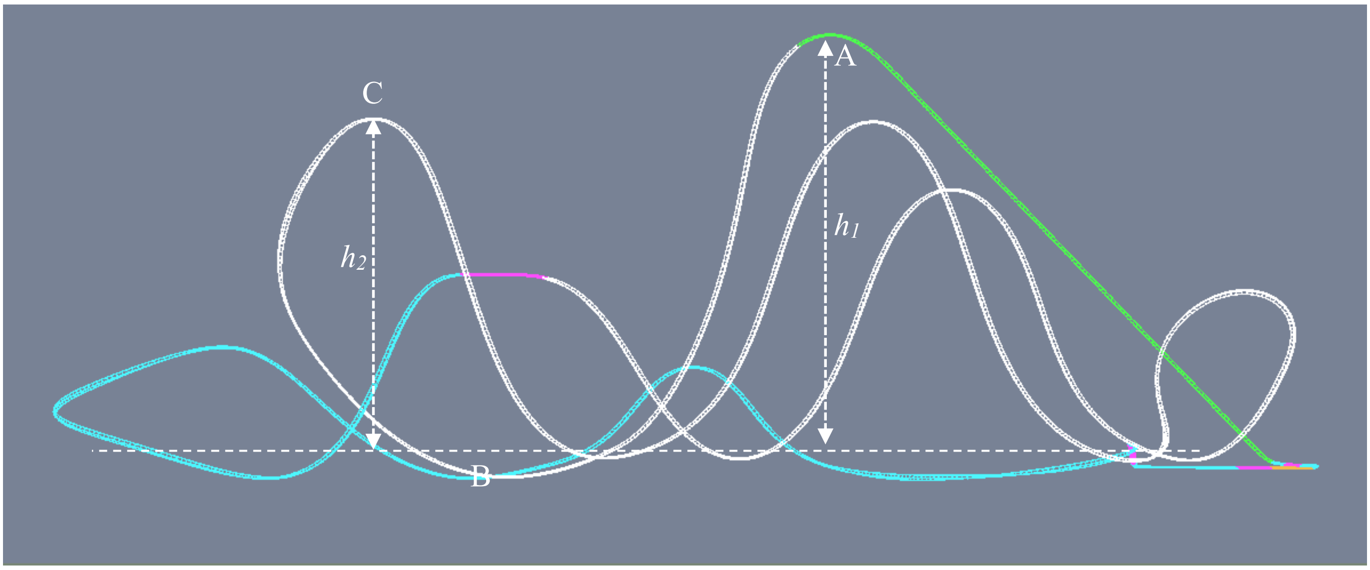


Un anneau de masse m, assimilable à un point matériel M, peut coulisser sans frottement sur un cerceau vertical de rayon r. L'anneau est lancé à l'instant initial avec une vitesse de norme v_0 depuis le point A, le plus bas du cerceau. On repère sa position par l'angle θ.

1. Etablir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de θ. (On choisira l'origine de l'énergie potentielle en $x = 0$)
2. Tracer la courbe $E_p(\theta)$ et déterminer les positions d'équilibre de M.
3. On cherche à déterminer le mouvement de M selon la vitesse initiale.
   a. Montrer que l'énergie mécanique de M se conserve et donner son expression en fonction de m, g, r et v_0.
   b. En déduire, à partir d'un raisonnement graphique, qu'il y a deux types de mouvement possibles en fonction de la valeur de v_0. Préciser la valeur critique de v_0 séparant ces deux cas.
4. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de M.

Pour aller plus loin

Exercice 7 : Montagnes russes **



Profil du parcours de l'attraction Silverstar (Source Wikipedia)

Le manège « Silverstar » du parc d'attraction EuropaPark dont le parcours est représenté ci-dessus possède les spécificités suivantes :

- *Masse du train et des passagers* $m = 16.10^3 \mathrm{kg}$
- *Hauteur de la première chute :* $h_1 = 67$ m
- *Hauteur de la première bosse :* $h_2 = 55$ m
- *Vitesse maximale :* $v_{max} = 127$ km. h^{-1}

Nous allons chercher à comprendre les différents effets ressentis dans cette attraction grâce à nos connaissances en mécanique. Le train est modélisé par un point matériel M de masse m.
Nous supposerons que tous les frottements peuvent être négligés pour toutes les questions.

L'accélération de la pesanteur est notée : $\vec{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ avec $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$

On considère que le train s'élance du point A avec une vitesse de l'ordre de $v_A \approx 5$ km. h^{-1}.

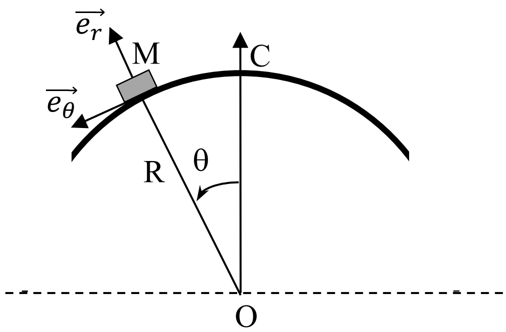
<u>Première descente (Phase A – B) et remontée (Phase B – C)</u>

1. Déterminer l'expression de la vitesse v_B du train au point B en fonction de g et h_1.
2. Calculer v_B. Comparer aux spécificités techniques du fabricant et commenter.
3. Déterminer la valeur numérique de la vitesse v_C du train au point C, sommet de la première bosse.

<u>Les « Airtimes ».</u>

Afin de procurer le maximum de sensations aux passagers, les concepteurs de grand huit multiplient les zones de « Airtimes », où le passager ressent une sensation d'impesanteur (le passager décolle du siège), notamment au passage du train sur une bosse.

Pour simplifier l'étude, on modélise le sommet de la bosse par une portion de rail circulaire de rayon $R = 13\ m$. On étudie le mouvement du train à l'aide des coordonnées polaires (voir schéma ci-dessous) On note C le point le plus haut de la bosse.



4. Rappeler l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ du train en coordonnées polaire.
5. Montrer qu'en un point M de la bosse, la norme de la réaction normale du rail sur le train s'exprime :

$$N = m\left(-\frac{v^2}{R} + g\cos(\theta)\right)$$

6. En déduire v_{min}, la valeur minimale de la vitesse du train nécessaire pour ressentir une sensation d'impesanteur au point C. Commenter.

<u>Capacités exigibles :</u>

- Les définitions de la **puissance et du travail** d'une force.
- Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.
- **Théorème de l'énergie cinétique et théorème de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen**
  - Utiliser la loi appropriée en fonction du contexte.
- **Energie potentielle. Energie mécanique.**
  - Distinguer force conservative et force non conservative.
  - Etablir et citer les expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme) et de l'énergie potentielle élastique
- **Mouvement conservatif :**
  - Identifier les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.
  - Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un système : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
  - Identifier une barrière et un puits de potentiel.
  - Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre et la nature stable ou instable de ces positions.
  - Réaliser le bilan énergétique d'un oscillateur mécanique en absence, puis en présence de frottement en régime libre.

<u>QCM d'entraînement :</u>