

## Travaux dirigés de Mécanique n°4

*Application directe du cours :*

### Exercice 1 : Un hélicoptère sur Mars (CCINP TSI)

Le 3 avril 2021, le rover Perseverance a déposé sur le sol martien un petit hélicoptère expérimental MHS (Mars Helicopter Scout) pesant 1,8 kilogramme. Baptisé *Ingenuity*, il réalisera 72 vols de reconnaissance avant de casser une pale le 18 janvier 2024.



Il se déplace dans les airs grâce à deux rotors bipales de 60 cm de rayon tournant en sens contraires. La vitesse de rotation est comprise entre 2400 et 2900 tours par minute, soit 10 fois celle des pales d'un hélicoptère sur Terre. En effet l'atmosphère martienne étant très ténue, l'air y est peu dense et nécessite donc une vitesse de rotation plus importante pour que l'appareil se soulève du sol.

La puissance du moteur utilisé est de l'ordre de 350 W.

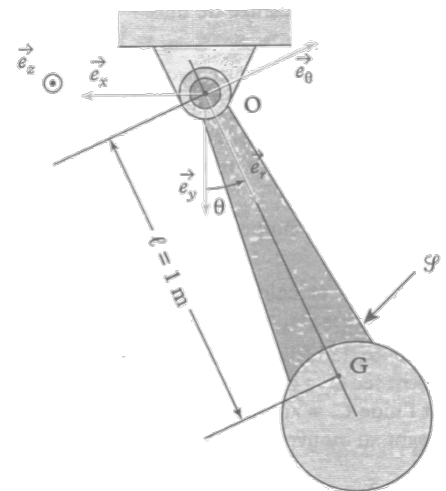
1. Calculer la vitesse angulaire maximale de rotation d'une hélice en  $\text{rad.s}^{-1}$ . En déduire la vitesse correspondante d'un point en bout de pale.
2. Sachant que la célérité du son dans l'atmosphère martienne est d'environ  $240 \text{ m.s}^{-1}$ , quel aurait été le problème rencontré si ces pales avaient eu un rayon de 1 m ?
3. Le moment d'inertie  $J$  d'une pale par rapport à son axe de rotation est approximativement  $J = \frac{mR^2}{12}$ , où  $m$  est sa masse et  $R$  sa longueur. Déterminer puis calculer la valeur du moment d'inertie correspondant à une hélice de l'hélicoptère, constituée de deux pales (chacune ayant une masse de 100 g).
4. En déduire la valeur de l'énergie cinétique d'une hélice lorsqu'elle tourne à vitesse maximale.
5. Exprimer puis calculer le moment cinétique d'une hélice lorsqu'elle tourne à vitesse maximale.
6. Sur la photo, on voit deux hélices contrarotatives, c'est-à-dire, pouvant tourner en sens inverse. Quel serait le moment cinétique de la deuxième hélice, tournant en sens contraire ? Quelle peut être l'utilité du caractère contrarotatif de ce dispositif ?

*Exemples classiques :*

### Exercice 2 : Balancier d'une horloge

Un balancier d'horloge est composé d'un solide S, de masse  $m$ , de centre de masse G et de moment d'inertie  $J = kml^2$  par rapport à l'axe  $\Delta = (O, \vec{e}_z)$ .

Il est mobile autour de l'axe  $\Delta$  par l'intermédiaire d'une liaison pivot parfaite. L'axe  $\Delta$  est fixe dans le référentiel galiléen terrestre.



1. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au balancier.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement du balancier.
3. Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.
4. Comment faut-il modifier  $l$  si l'horloge avance ? retarde ?

### Exercice 3 : Pendule de torsion

En 1675, Christiaan Huygens invente le ressort spiral. Il constitue, avec le balancier, l'organe régulant des montres mécaniques.

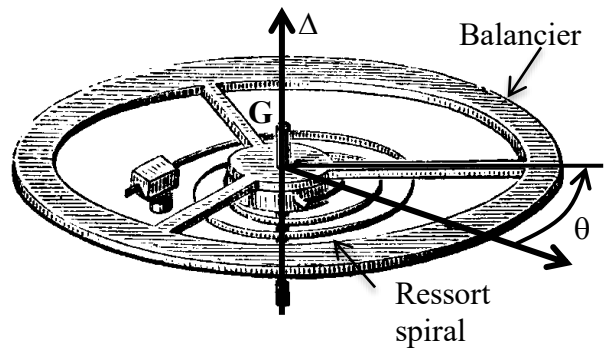
Le balancier est constitué d'un disque évidé homogène de rayon  $R = 5 \text{ mm}$  et de masse  $m = 0,4 \text{ g}$ . Il est libre de tourner autour d'un axe vertical  $\Delta$  passant par son centre de gravité  $G$  (voir schéma).

Le moment d'inertie du balancier par rapport à l'axe  $\Delta$  est  $J = mR^2$ . Le pivot est supposé parfait.

Un ressort spiral possède une extrémité soudée au balancier et l'autre est soudée à un point fixe.

La rotation du balancier est repérée par l'angle  $\theta$ , choisi de telle sorte que le ressort est à vide pour  $\theta = 0$ .

On modélise l'action du ressort spiral par un couple de torsion  $\Gamma = -C\theta$  par rapport à l'axe  $\Delta$ . Dans un premier temps, on néglige tous les frottements.



1. Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures appliquées au balancier.
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  au cours du temps.
3. En déduire la pulsation  $\omega_0$  et la période  $T_0$  des petites oscillations du système autour de sa position d'équilibre en fonction de  $J$  et  $C$ .
4. L'horloger souhaite que le balancier effectue 3 allers-retours par seconde. En déduire la valeur numérique de la constante de torsion  $C$ .
5. Par analogie avec un ressort, on peut écrire l'énergie potentielle de torsion sous la forme :

$$E_p = \frac{1}{2} C \theta^2$$

- 5.1. En déduire l'expression de l'énergie mécanique  $E_m$  du système.
- 5.2. Retrouver l'équation établie en 2. en utilisant un théorème énergétique.
6. On considère à présent les frottements de l'air. On les modélise par un couple de frottement visqueux qui, en projection sur l'axe  $\Delta$  s'écrit :  $M_{\Delta, \text{frott}} = -2aJ\dot{\theta}$  où  $a$  est une constante positive.
  - 6.1. Déterminer les dimensions du coefficient  $a$  par analyse dimensionnelle.
  - 6.2. Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par l'angle  $\theta$  au cours du temps.
  - 6.3. On suppose  $10a = \omega_0$ . Quel est le régime d'évolution de l'oscillateur ainsi constitué ? Représenter l'allure de l'angle  $\theta$  au cours du temps.

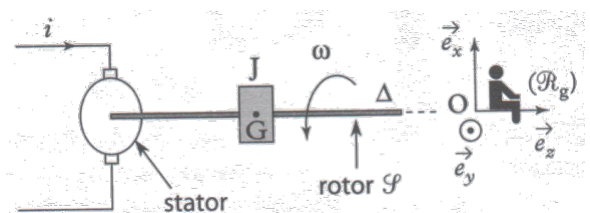
*Machines tournantes :*

### Exercice 4 : Mise en rotation d'un moteur

On étudie la phase de mise en rotation du rotor  $S$  (partie tournant) d'un moteur de robotique dans le référentiel terrestre.

Le rotor  $S$ , de moment d'inertie  $J = 10,7 \cdot 10^{-7} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , est soumis à un couple moteur  $C_m$  dont la valeur est proportionnelle à l'intensité du courant  $i$  traversant le stator (partie fixe) du moteur :

$$C_m = k \cdot i \text{ avec } k = 22 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$$



Le courant  $i$  est constant :  $i = I_0 = 0,1 \text{ A}$ . On suppose que le centre de masse  $G$  du rotor est sur l'axe  $\Delta$ .

1. On néglige tous les frottements.
  - a. En utilisant le TMC, déterminer l'expression de la vitesse angulaire  $\omega(t)$  de  $S$  en supposant qu'au départ  $S$  est au repos.
  - b. Déterminer puis calculer le temps  $T_0$  mis pour atteindre la vitesse  $\omega_0 = 1800 \text{ rad.s}^{-1}$ .
2. En réalité, le rotor  $S$  est soumis à un couple de frottement sec  $C_s = 400 \mu\text{N.m}$  et à un couple de frottement fluide  $C_f = \lambda\omega$  ( $\lambda = 10^{-6} \text{ N.m}$ ), tous deux s'opposant au mouvement.
  - a. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire  $\omega(t)$
  - b. Montrer que le moteur atteint une vitesse angulaire maximale  $\omega_f$  que l'on déterminera.
  - c. Déterminer le temps  $T$  mis par le moteur pour atteindre ce régime permanent à 5% près. Conclure.
  - d. En régime permanent, exprimer puis calculer la puissance mécanique délivrée par le moteur ainsi que la puissance dissipée par les frottements. Commenter.

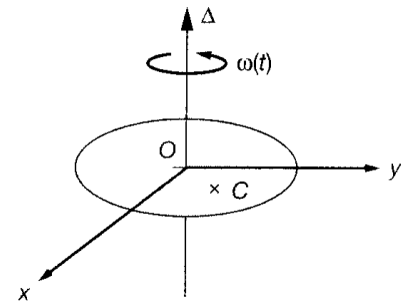
### Exercice 6 : Réaction d'axe

Un disque non homogène de centre  $O$ , de masse  $m$  et de rayon  $R$  est en liaison pivot autour de l'axe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\omega$ .

La liaison pivot est supposée parfaite. Le centre d'inertie du disque noté  $C$  est tel que  $OC = a$ .

On note  $J$  le moment d'inertie du disque.

1. Initialement, la vitesse angulaire du disque vaut  $\omega_0$ . Que dire de  $\omega(t)$  ?
2. Déterminer l'expression de la réaction  $R$  de l'axe sur le disque en fonction de  $a$ ,  $\omega_0$  et  $m$ .
3. Pourquoi a-t-on intérêt à diminuer  $a$ , notamment lors de rotations rapides ? C'est ce que l'on nomme l'équilibrage statique.



**Capacités exigibles :**

- Différencier un solide d'un système déformable.
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque d'un solide en rotation autour d'un axe fixe et exprimer sa vitesse (  $v = R.\omega$  )
- Exploiter la relation pour le solide entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Exprimer le moment d'une force par rapport à un point et à un axe orienté, en privilégiant l'utilisation du bras de levier.
- Définir un couple de forces, le moment d'un couple
- Définir une liaison pivot parfaite et justifier la valeur de son moment.
- Établir l'équation différentielle d'un système à l'aide du théorème du moment cinétique.
- Établir l'équation du mouvement du pendule pesant. Établir l'intégrale première du mouvement.
- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un solide en rotation, loi de l'énergie cinétique.
- Système déformable :
  - Prendre en compte le travail des forces intérieures.
  - Réaliser le bilan énergétique du tabouret d'inertie.

**QCM d'entraînement :**